LATVIJAS UNIVERSITĀTE
ATOMFIZIKAS UN SPEKTROSKOPIJAS INSTITŪTS

LATVIJAS UNIVERSITĀTE

79. Latvijas Universitātes starptautiskā zinātniskā konference

Divi saistītie nelineārie Šrēdingera vienādojumi

R.Veilande, I.Bērsons, O.M.Eberliņš

12.02.2021.

NACIONĀLAIS ATTĪSTĪBAS PLĀNS 2020
EIROPAS SAVIENĪBA
Eiropas Reģionālās attīstības fonds
IEGULDĪJUMS TAVĀ NĀKOTNĒ

ERAF projekts Nr. 1.1.1.1/18/A/155

1D nelineārais Šrēdingera vienādojums (NSV)

- Viendimensionālais nelineārais Šrēdingera vienādojums ir Šrēdingera vienādojuma nelineāra variācija. Tas ir klasiskā lauka vienādojums, apraksta viļņa izplatīšanos nelineārā vidē. Tiek izmantots daudzās fizikas jomās kā nelineārā optika (šķiedru optika, mikrorezanatori), šķidrumos, Bozē-Einšteina kondensatorā, gravitācijas viļņu aprakstā, plazmā, enerģijas transportēšanā caur molekulu ķēdēm u.c.

- 1D NSV ir integrējams parciālais diferenciālvienādojums. Tam var iegūt analītisku atrisinājumu – solitonu – telpā lokalizētu objektu, kas kustās ar nemainīgu ātrumu.

- Ir vairākas metodes, kā to var risināt. Mēs izmantojam Hirotas metodi.

1D nelineārais Šrēdingera vienādojums

$$\left[i\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + |F|^2\right]F = 0$$

Hirotas metode, kurā atrisinājumu meklē šādā formā: $F = \frac{g}{f}$.

Hirotas operatori: $D_z(g \cdot f) = g_z f - g f_z; \quad D_t^2(g \cdot f) = g_{tt} f - 2g_t f_t + g f_{tt}$

Tad 1D NSV var pārrakstīt šādā formā:

$$iD_z(g \cdot f) + \frac{1}{2}D_t^2(g \cdot f) = 0$$

$$D_t^2(f \cdot f) = 2|g|^2$$

Tiem atrisinājumu meklē kā pakāpju funkcijas:

$$g = \varepsilon g_1 + \varepsilon^3 g_3 + \cdots; \; f = 1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^4 f_4 + \cdots$$

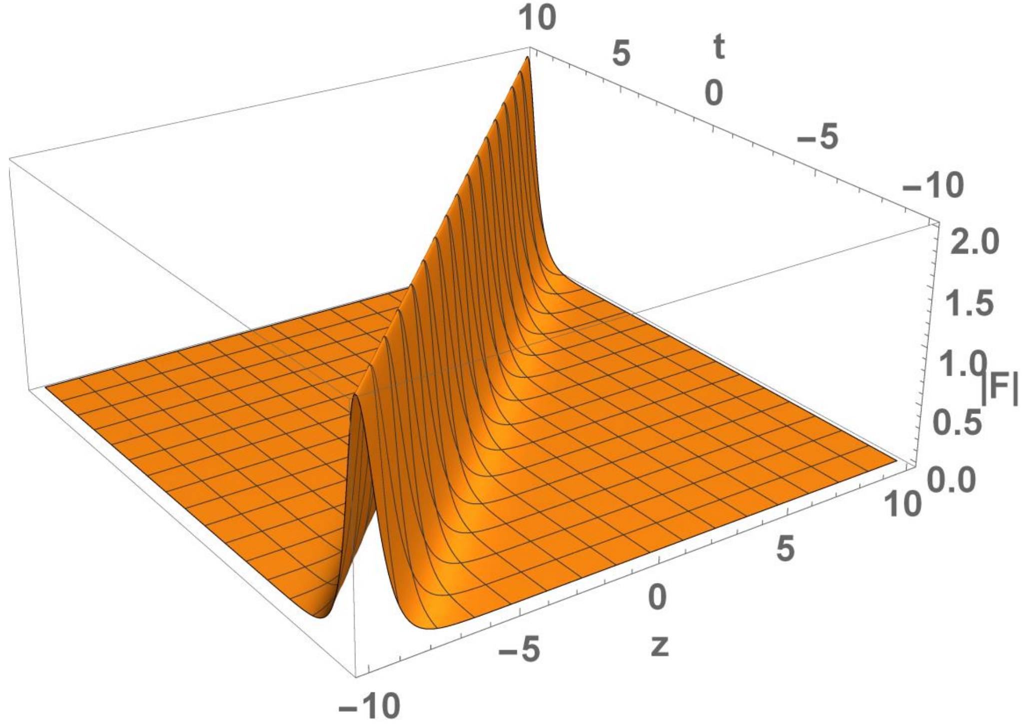
Viensolitona atrisinājums: $F = \frac{g_1}{1+f_2}$

Divsolitona atrisinājums: $F = \frac{g_1+g_3}{1+f_2+f_4}$

Viensolitona atrisinājums:

Ja meklē šādā formā: $g_1 = 2bre^{(b+ik)t+\frac{i}{2}(b+ik)^2 z}, \ r = e^{\delta},$

Atrisinājums: $F = \dfrac{be^{ikt+\frac{iz}{2}(b^2-k^2)}}{\cosh(bkz-bt-\delta)}.$



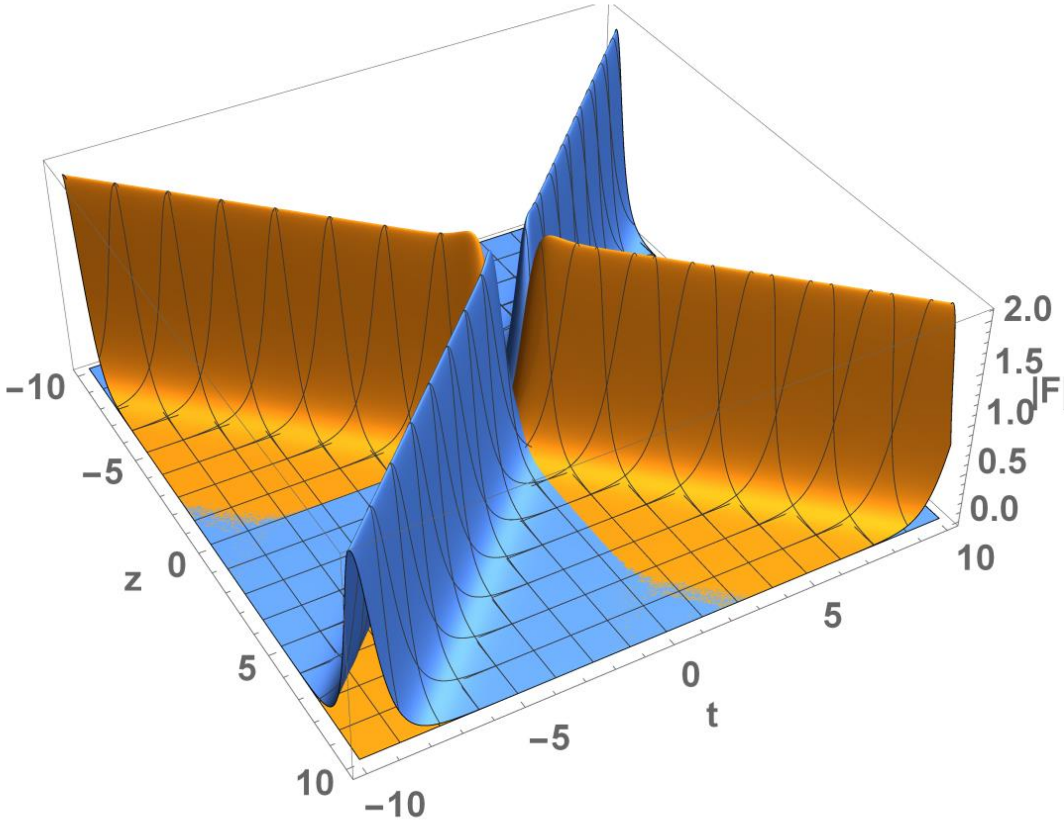
Divsolitonu atrisinājums: $F = \frac{g_1+g_3}{1+f_2+f_4}$

$$g_1 = 2br_1e^{(b+ik)t+\frac{i}{2}(b+ik)^2z} + 2br_2e^{(b-ik)t+\frac{i}{2}(b-ik)^2z}$$

$$g_3 = -\frac{2k^2br_1|r_2|^2}{(b+ik)^2}e^{(3b+ik)t+\frac{iz}{2}(b-ik)^2} - \frac{2k^2br_2|r_1|^2}{(b-ik)^2}e^{(3b-ik)t+\frac{iz}{2}(b+ik)^2}$$

$$f_2 = |r_1|^2e^{2bt-2kbz} + |r_2|^2e^{2bt+2kbz} + \frac{r_1^*r_2b^2}{(b-ik)^2}e^{2t(b-ik)} + \frac{r_1r_2^*b^2}{(b+ik)^2}e^{2t(b+ik)}$$

$$f_4 = \frac{k^4|r_1|^2|r_2|^2}{(b^2+k^2)^2}e^{4bt}$$



Divi saistīti 1D nelineāri Šrēdingera vienādojumi

$$\begin{cases} \left[i\dfrac{\partial}{\partial z} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + |F_1|^2 + |F_2|^2 + \cos\beta\,(F_1F_2^* + F_1^*F_2) \right] F_1 = 0 \\ \left[i\dfrac{\partial}{\partial z} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + |F_1|^2 + |F_2|^2 + \cos\beta\,(F_1F_2^* + F_1^*F_2) \right] F_2 = 0 \end{cases}$$

Atrisinājumu meklē pēc Hirotas metodes $F_1 = \frac{g}{f}$; $F_2 = \frac{h}{f}$

$$\left[iD_z + \tfrac{1}{2}D_t^2 \right](g \cdot f) = 0$$

$$\left[iD_z + \tfrac{1}{2}D_t^2 \right](h \cdot f) = 0$$

$$D_t^2(f \cdot f) = 2|g|^2 + 2|h|^2 + 2\cos\beta\,(gh^* + g^*h)$$

Funkcijas meklē kā izvirzījumu pa ε pakāpēm:

$$g = \varepsilon g_1 + \varepsilon^3 g_3 + \cdots; \qquad h = \varepsilon h_1 + \varepsilon^3 h_3 + \cdots; \qquad f = 1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^4 f_4 + \cdots$$

Atrisinājumu, kad solitoni kustas pretējos virzienos, meklē formā:

$$g_1 = 2br_1 e^{b(t-kz)+ikt+\frac{iz}{2}(b^2-k^2)}; \quad h_1 = 2br_2 e^{b(t+kz)-ikt+\frac{iz}{2}(b^2-k^2)}$$

Atrastās funkcijas g_3 un h_3 satur abas eksponentes, tādēļ rezultātu attēlojam veidā, kur funkcijas F_1 un F_2 atrisinājumos apvienojam tās daļas, kas raksturo solitona kustību vai nu vienā virzienā vai otrā virzienā:

$$F_1 = \frac{g_1+g_{31}+h_{32}}{1+f_2+f_4}; \qquad F_2 = \frac{h_1+g_{32}+h_{31}}{1+f_2+f_4};$$

Atrisinājums, ja $r_1 = r_2 = 1$:

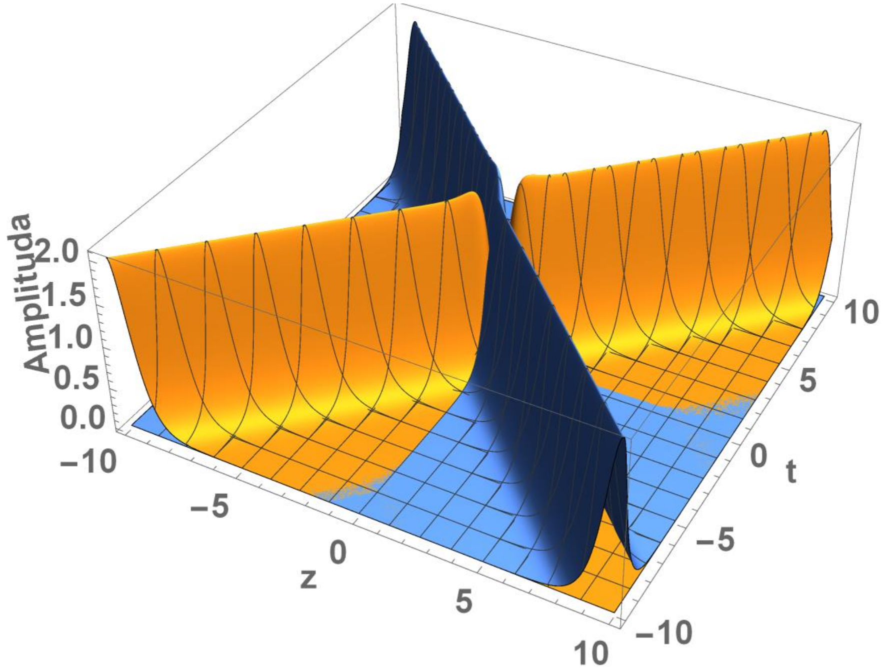
$$F_{12} = \frac{2be^{b(t\mp kz)\pm ikt+i\left(b^2-k^2\right)z/2}\left(1+e^{2b(t\pm kz)}\left[\pm\frac{ik}{b\pm ik}\mp\frac{ikb\cos\beta}{(b\pm ik)^2}\right]\right)}{1+e^{2b(t-kz)}+e^{2b(t+kz)}+b^2\cos\beta\, e^{2bt}\left(\frac{e^{2ikt}}{(b+ik)^2}+\frac{e^{-2ikt}}{(b+ik)^2}\right)+e^{4bt}\left(\frac{k^2}{b^2+k^2}+\frac{k^2b^2\cos^2\beta}{(b^2+k^2)^2}\right)}$$

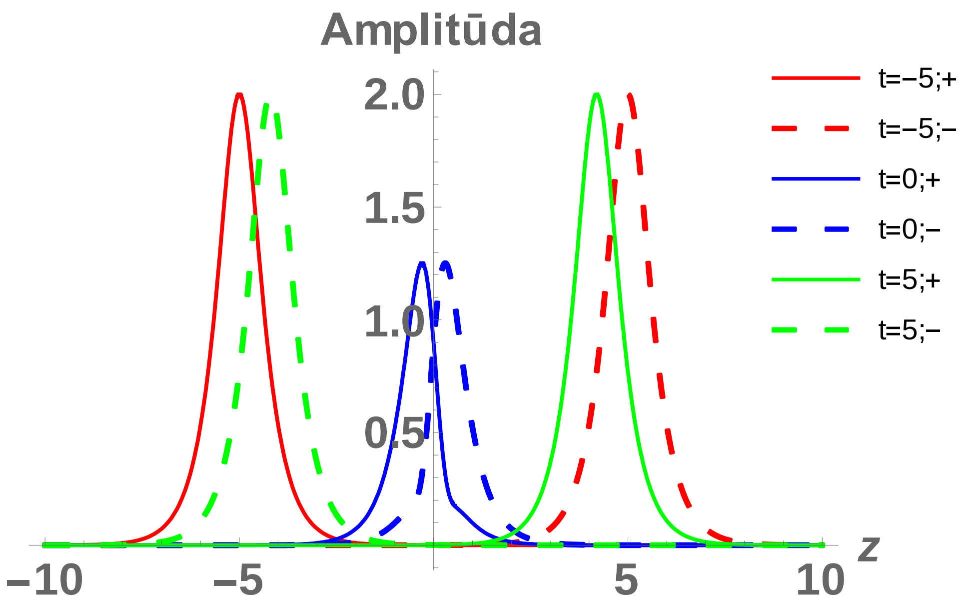
Gadījumā, kad polarizācija starp abiem solitoniem ir $\beta = 0$, tad iegūstam iepriekš atrasto divsolitona atrisinājumu vienam 1D nelineārajam Šrēdingera vienādojumam.

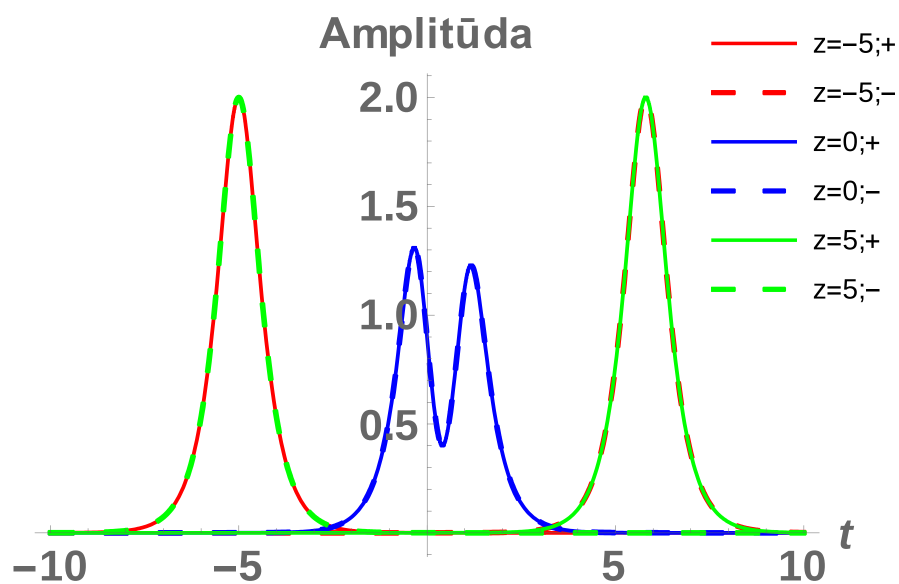
patvaļīga konstante: **b=2**

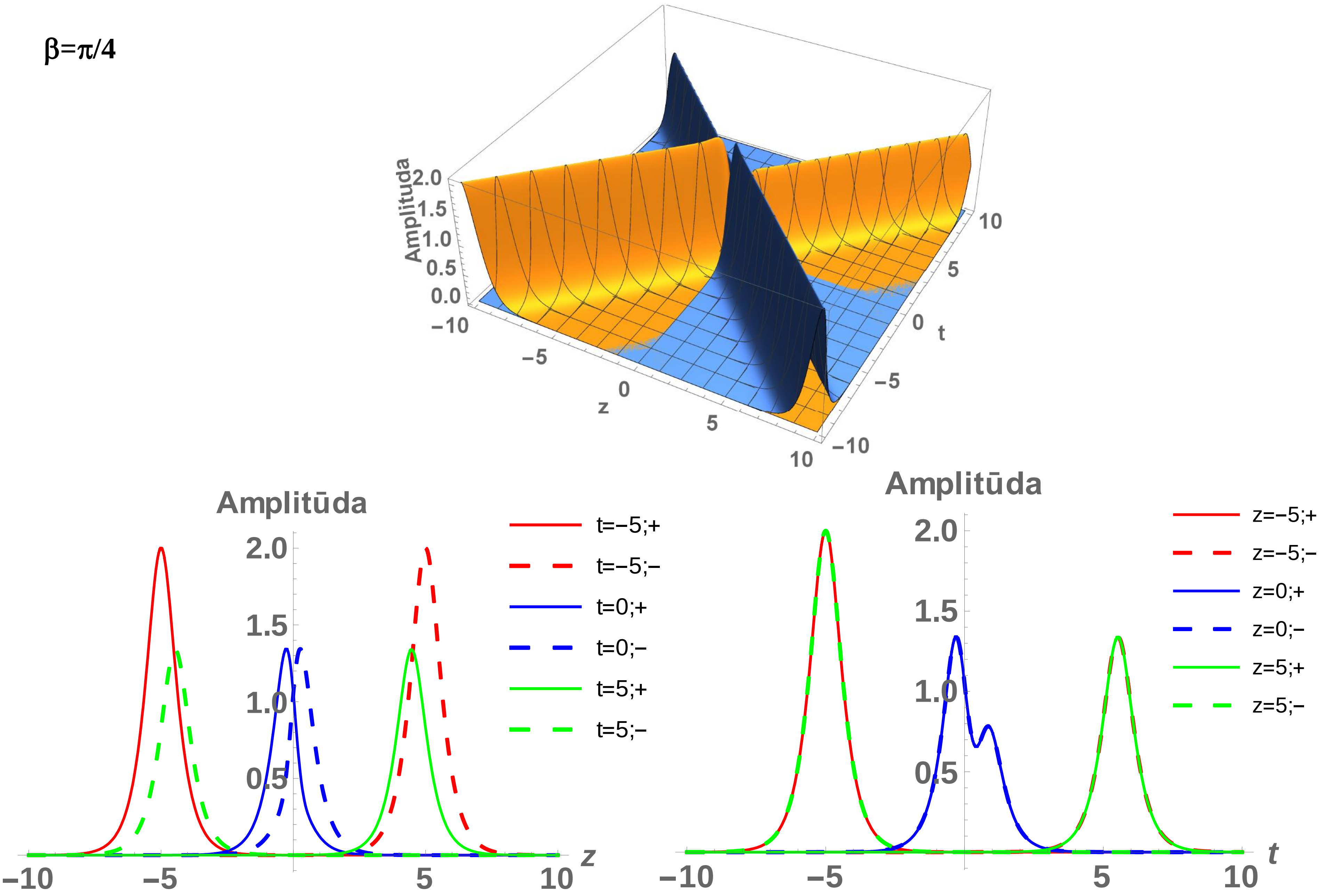
bezdimensionālais ātrums (v/c=): **k=1**

leņķis starp solitoniem: **β=0**



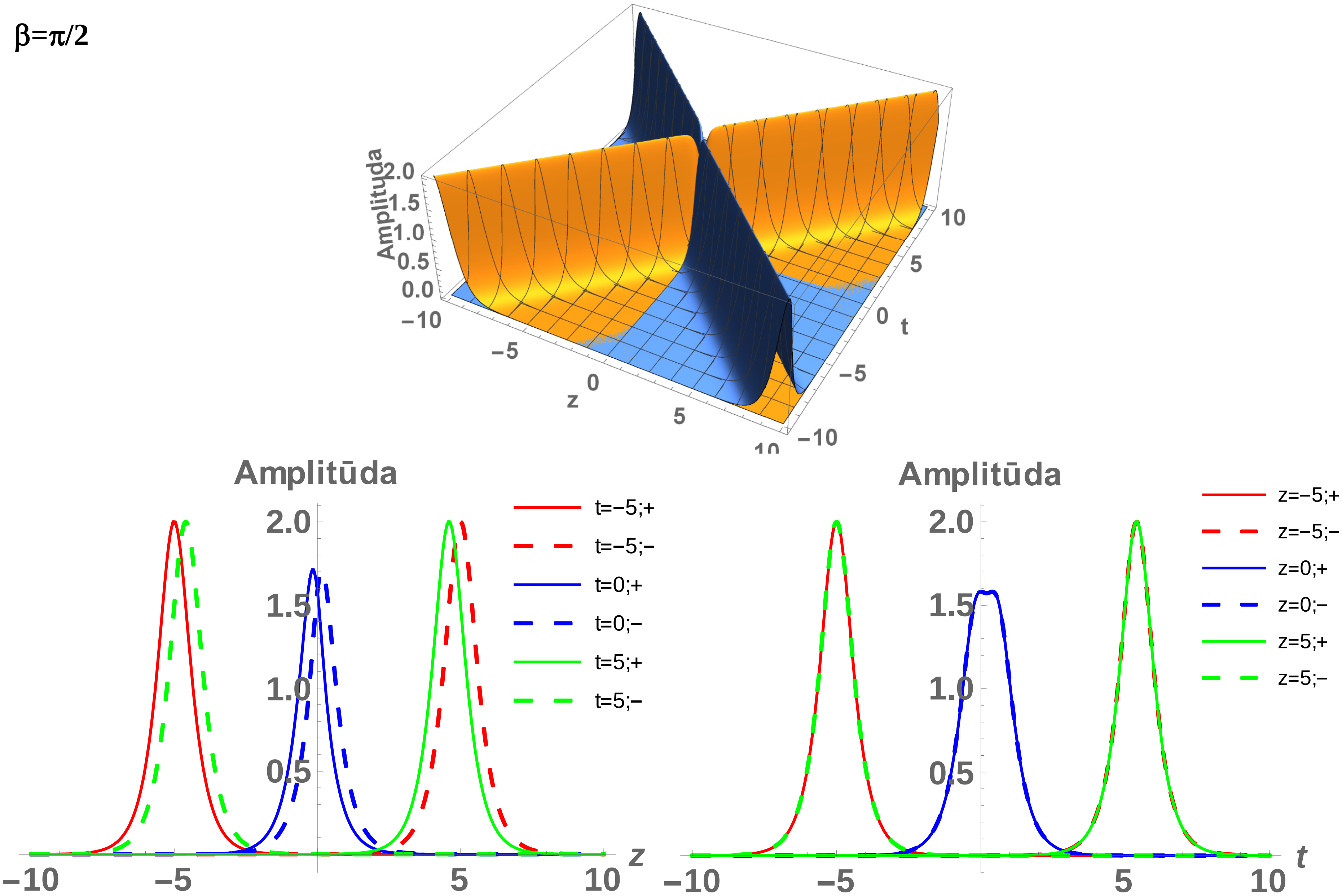






β=π/4
Amplituda
z
t
Amplitūda
t=−5;+
t=−5;−
t=0;+
t=0;−
t=5;+
t=5;−
z
Amplitūda
z=−5;+
z=−5;−
z=0;+
z=0;−
z=5;+
z=5;−
t

β=π/2



Amplitūda
z
t
Amplitūda
t=−5;+
t=−5;−
t=0;+
t=0;−
t=5;+
t=5;−
z
Amplitūda
z=−5;+
z=−5;−
z=0;+
z=0;−
z=5;+
z=5;−
t

Paldies par uzmanību!