

Aktivitāte 1.4

**„Izstrādātā multifizikālā modeļa verifikācija, izmantojot
salīdzinošos aprēķinus vienkāršotām problēmas nostādnēm
un modeļeksperimentus laboratorijas apstākļos”
(verificēts modelis)**

Matemātiskais modelis skaņas izplatīšanās analīzei kompozītās būvkonstrukcijās un skaņas slāpēšanas indeksa noteikšanai

Skaņas vājinājuma indeksu būvkonstrukcijām nosaka akustiskajos mērījumos, kas tiek veikti saskaņā ar LVS EN ISO 140 -1,2,3,4,5 prasībām. Šie standarti paredz parauga montāžu, mērīšanas iekārtu prasības un prasības testēšanas laboratorijām. Izsvērtā skaņas vājinājuma indeksa novērtēšanu apraksta standarti LVS EN ISO 717-1 skaņai gaisā un LVS EN ISO 717 -2 triecienskaņai.

Matemātiskais modelis apraksta skaņas izplatīšanos vidē lietojot fizikālās pamatsakarības, nevis aptuvenas formulas, kas iegūtas empīrisku novērojumu rezultātā, vai inženiertuvinājumus. Tādējādi matemātisko modeli veido vienādojumi, kas apraksta skaņu gāzēs, šķidrumos un cietās vielās kā arī speciālos gadījumos dažādos porainos materiālos.

Skaņas izplatīšanos gāzēs un šķidrumos apraksta viļņu vienādojums, kas vispārīgā formā ir šāds:

$$\frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \nabla \left(-\frac{1}{\rho} (\nabla p - q) \right) = Q \quad (1)$$

kur ρ – blīvums, c – skaņas ātrums, p – spiediens, q – dipolveida avots, Q – punktveida avots.

Risinot viļņu vienādojumu, spiediena novirzes ir jāizšķir laikā un tas noved pie ārkārtīgi liela aprēķinu laika, tāpēc problēmas vienkāršošanai, harmoniskas spiediena maiņas gadījumā

$$p(x, t) = p(x) e^{i\omega t} \quad (2)$$

kur ω – leņķiskā frekvence, i – imaginārā vienība, var risināt stacionāru vienādojumu spiediena svārstību amplitūdai:

$$\nabla \left(-\frac{1}{\rho} (\nabla p - q) \right) - \frac{\omega^2 p}{\rho c^2} = Q \quad (3)$$

Šis tuvinājums ir labs, jo veicot inverso Furjē transformāciju, ir iespējams noteikt arī kā spiediens mainīsies laikā, jo atrisinājums ietver sevī fāzes nobīdi.

Pieņemot, ka skaņas avots staro vienādi visos virzienos, kā to paredz minētie standarti, tiek izmantots punktveida avots:

$$Q = 2 \sqrt{\frac{P\omega}{\rho}} \quad (4)$$

$$q = 0$$

Šajā gadījumā vienādojums (3) iegūst formu:

$$\nabla \left(-\frac{1}{\rho} (\nabla p) \right) - \frac{\omega^2 p}{\rho c^2} = 2 \sqrt{\frac{P\omega}{\rho}} \quad (5)$$

Šajā vienādojumā nav rimšanas locekļu, tāpēc pie rezonanses frekvencēm spiediena vērtības var sasniegt lielumus, kas vairs neatbilst mazu svārstību

tuvinājumam. Lai precīzi tvertu šo efektu, tiek lietots nelineārs tuvinājums, kad skaņas vājinājums ir tieši proporcionāls skaņas spiedienam.

Šim vienādojumam robežnosacījumi uz cietām apgabala virsmām var būt pilnīgi atstarojoši,

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (6)$$

pilnīgi absorbējoši,

$$p = 0 \quad (7)$$

vai arī daļēji atstarojoši,

$$-n \left(-\frac{1}{\rho} (\nabla p) \right) = -\frac{i\omega p}{Z} \quad (8)$$

kur Z – akustiskā impedance, kura katram materiālam ir citāda. Tā, līdzīgi kā gaismas laušanas koeficients optikā, nosaka kādā mērā skaņa tiks atstarota vai absorbēta.

Robežnosacījumi uz porainām virsmām tiks apskatīti vēlāk.

Skaņas izplatīšanās cietās vielās tiek aprakstīta lietojot sakarības starp elastības, sastiepuma un pārvietojuma tenzoriem. Šādā veidā ir iespējams modelēt gan izotropus, gan anizotropus materiālus. Ideālā gadījumā iesvārstīts ciets materiāls svārstīsies bezgalīgi ilgi, tāpēc ir nepieciešams modelī iekļaut rimšanas faktorus, kas arī noteiks skaņas vājinājuma indeksu. Cietās vielās deformāciju apraksta deformācijas tenzors

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T) \quad (9)$$

kur ε_{ij} – deformācijas tenzors, u – pārvietojums

Sakarība, kas saista deformāciju tenzoru ar spriegumu tenzoru ir šāda:

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 + C : \varepsilon_{ij} \quad (10)$$

kur σ_{ij} – sprieguma tenzors, C – elastības tenzors.

Viļņu vienādojumu cietās vielās var uzrakstīt lietojot Huka likumu un 2. Ņūtona likumu

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \nabla(\nabla u - f) = F \quad (11)$$

Arī šajā gadījumā tiek lietots no laika neatkarīgs vienādojums, pieņemot laikā harmoniskas svārstības:

$$p(u, t) = p(u) e^{i\omega t} \quad (12)$$

Šajā gadījumā vienādojums (11) vienkāršojas

$$-\rho \omega^2 u + \nabla(\nabla u - f) = F \quad (13)$$

Robežnosacījumi šai problēmai var būt pilnīgi fiksēta virsma, respektīvi nekāds pārvietojums nav iespējams:

$$u = 0 \quad (14)$$

Uz kontaktvirsmām ar gaisa vai šķidruma apgabaliem tiek lietoti nepārtrauktības robežnosacījumi:

$$\begin{cases} F = -np \\ a_n = -n(-\omega^2 u) \end{cases} \quad (15)$$

kur a_n - normālais paātrinājums. Spēku cietā materiāla spriegumiem rada normālais spiediens, bet deformācijas rada paātrinājumu gaisa vai šķidruma apgabaliem.

Stipri porainos materiālos, kā piem. akmens vate, skaņas izplatīšanos apraksta *Delany* un *Bazley* izstrādātais daļēji empīriskais modelis, kurā lieto konstantes un plūsmas pretestību, kas ir eksperimentāli viegli izmērāma.

Vienādojums ir tāds pats kā (3), bet skaņas ātrums un blīvums tiek izteikts ar empīrisko konstanšu palīdzību:

$$c_c = \frac{c}{\left(1 + C_1 \left(\rho \frac{f}{R_f}\right)^{C_2} - iC_3 \left(\rho \frac{f}{R_f}\right)^{C_4}\right)} \quad (16)$$

$$\rho_c = \frac{\rho c}{c_c} \left(1 + C_5 \left(\rho \frac{f}{R_f}\right)^{C_6} - iC_7 \left(\rho \frac{f}{R_f}\right)^{C_8}\right) \quad (17)$$

Robežnosacījumi šai problēmai ir tādi paši kā šķidrumiem un gāzēm. Empīriskās konstantes ir ieviestas, lai aprakstītu svārstību rīšanu materiālā. Šo konstanšu būtība ir aizstāt porainu materiālu ar šķidrumu, kuram ir identiskas īpašības. Porainiem materiāliem ar cietu skeletu, kuru porozitāte nav liela šis apraksts nav derīgs un tiek lietoti *Biot* tuvinājumi.

Biot nodalīja materiāla cieto skeletu no poru šķidruma vai gāzes, katrā apgabalā risinot atbilstošo vienādojumu. Enerģijas disipācija šajā gadījumā notiek viskozitātes dēļ šķidrumam vai gāzei mijiedarbojoties ar cieto skeletu. Šajā gadījumā pastāv papildus vilnis, kuram ir garenviļņa daba, kurš ir difūza rakstura un ātri zaudē enerģiju.

No iepriekšminētajiem pamatprincipiem var uzrakstīt vienādojumus šķidruma vai gāzes un cietā skeleta pārvietojumiem

$$\rho_{av} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho_f \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \nabla \sigma = 0 \quad (18)$$

$$\rho_f \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\mu_f}{\kappa} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\tau}{\varepsilon_p} \rho_f \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \nabla \sigma = 0 \quad (19)$$

kur ρ_{av} – šķidruma vai gāzes un cietā skeleta kopējais blīvums, ρ_f – poru šķidruma vai gāzes blīvums. ε_p – porozitāte, τ – parametrs, kas raksturo poru novietojumu pret skaņas izplatīšanās virzienu. μ_f – viskozitāte, κ – materiāla caurlaidība, w - šķidruma vai gāzes pārvietojums

Līdzīgi kā iepriekš pieņem harmonisku atkarību no laika un vienādojumi (18) un (19) tiek reducēti uz šādu formu:

$$\begin{cases} -\rho_{av} \omega^2 u + \rho_f \omega^2 w - \nabla \sigma = 0 \\ -\rho_f \omega^2 u - \rho_c \omega^2 w - \nabla p_f = 0 \end{cases} \quad (20)$$

Šajā vienādojumā kompleksais blīvums tiek izteikts kā

$$\rho_c(\omega) = \frac{\tau}{\varepsilon_p} \rho_f + \frac{\mu_f}{i\omega\kappa} \quad (21)$$

un raksturo svārstību rīšanu šķidruma vai gāzes viskozitātes dēļ.

No skaitliskā viedokļa šis nav optimālākais veids kā risināt vienādojumu, tāpēc tas tiek pārveidots formā, kur ir izslēgts šķidruma vai gāzes pārvietojums:

$$\begin{cases} -\omega^2 \left(\rho_{av} - \frac{\rho_f^2}{\rho_c} \right) u - \nabla(\sigma_{dr} - f) = F \\ -\frac{\omega^2}{M} p_f + \nabla \left(-\frac{1}{\rho_c} (\nabla p_f - q) \right) = Q \end{cases} \quad (22)$$

kur

$$\frac{1}{M} = \varepsilon_p \chi_f + \alpha_B - \frac{\varepsilon_p}{K_{dr}} (1 - \alpha_B) \quad (23)$$

$$F = \frac{\rho_f}{\rho_c} \nabla p_f \quad (24)$$

$$f = \alpha_B p_f I \quad (25)$$

$$Q = \omega^2 \alpha_B \varepsilon \quad (26)$$

$$q = \omega^2 \rho_f u \quad (27)$$

kur I - vienības matrica, α_B - Biot – Willis koeficient.

Kā robežnosacījumi šai problēmai tiek lietoti pilnībā fiksētu virsmu nosacījumi:

$$\begin{cases} u = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \end{cases} \quad (28)$$

Arī cieta materiāla vai gaisa (šķidruma) robežām tiek lietoti nepārtrauktības robežnosacījumi, kuri aprakstīti iepriekš.

Informatīvās atskaites sadaļās 1 un 2 aprakstītie matemātiskie modeļi tiek skaitliski realizēti izmantojot komerciālās matemātiskās modelēšanas programmu paketes ANSYS un COMSOL, kā arī izmantojot pašu izstrādātus programmu līdzekļus, piem., MatLab vidē. Modeļu aprobācija veikta salīdzinot vienkāršotās nostādnēs iegūtos rezultātus ar analītiskajiem atrisinājumiem, salīdzinot savā starpā rezultātus, kas vienam un tam pašam modeļa formulējumam iegūti ar dažādiem programmlīdzekļiem, kā arī salīdzinot konkrētu problēmas nostādņu aprēķinu rezultātus ar laboratorijas apstākļos veikto mērījumu rezultātiem.