Kāda ir regulāro valodu klase, ko pazīst kvantu automāti?

Marats Golovkins, Maksims Kravcevs, Vasilijs Kravcevs

12. aprīlis, 2010

EIROPAS SOCIĀLAIS FONDS

Eiropas Sociālā fonda projekts
“Datorzinātnes pielietojumi un tās saiknes ar kvantu fiziku”
Nr.2009/0216/1DP/1.1.1.2.0/09/APIA/VIAA/044

Automātu modeļi

	"Classical" word acceptance	"Decide-and-halt" word acceptance
Deterministic Reversible Automata	Group Automata (GA) Klase: Grupu valodu varietāte	Reversible Finite Automata (RFA) [Ambainis and Freivalds]
Quantum Finite Automata with pure states	Measure-Once Quantum Finite Automata (MO-QFA) [Moore et al] Klase: Grupu valodu varietāte	Measure-Many Quantum Finite Automata (MM-QFA) [Kondacs and Watrous]
Probabilistic Reversible Automata	"Classical" Probabilistic Reversible Automata (C-PRA) [Golovkins and Kravtsev] Klase: **BG** valodu varietāte	"Decide-and-halt" Probabilistic Reversible Automata (DH-PRA) [Golovkins and Kravtsev]
Quantum Finite Automata with mixed states	Latvian Quantum Finite Automata (LQFA) [Ambainis et al, Golovkins and Kravtsev] Klase: **BG** valodu varietāte	Enhanced Quantum Finite Automata (EQFA) [Nayak]

Valodu operācijas: kvocients

L – valoda alfabētā A, $a \in A$

$$a^{-1}L = \{v \in A^* \mid av \in L\}$$

$$La^{-1} = \{v \in A^* \mid va \in L\}$$

Valodu operācijas: morfismi

L_1 – valoda alfabētā A, L_2 – valoda alfabētā B

Morfisms:

Funkcija φ: $A^* \to B^*$, tāda ka visiem x, y $\in A^*$

$$(xy)\,\varphi = (x\varphi)(y\varphi)$$

Tādējādi,

$$L_1\varphi = \{v \in B^* \mid \exists w \in L_1 : w\varphi = v\}$$

Inversais morfisms:

$$L_2\varphi^{-1} = \{w \in A^* \mid w\varphi \in L_2\}$$

Valodu varietāte

$A^*\mathbf{C}$ – valodu klasei **C** atbilstošās valodas alfabētā A.

Valodu varietāte ir valodu klase **C**, kas ir

a) slēgta pret apvienojumu, šķēlumu un papildinājumu,
t.i., visām valodām $L, L_1, L_2 \in A^*\mathbf{C}$:
$L` \in A^*\mathbf{C}$, $L_1 \cup L_2 \in A^*\mathbf{C}$, $L_1 \cap L_2 \in A^*\mathbf{C}$;

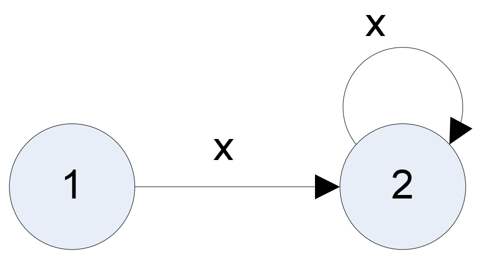
b) slēgta pret kvocienta operācijām,
t.i., visām valodām $L \in A^*\mathbf{C}$ un visiem $a \in A$:
$a^{-1}L \in A^*\mathbf{C}$, $La^{-1} \in A^*\mathbf{C}$

c) slēgta pret inversajiem morfismiem,
t.i., ja φ ir morfisms $A^* \rightarrow B^*$, tad visām valodām $L \in B^*\mathbf{C}$: $L\varphi^{-1} \in A^*\mathbf{C}$

- *Divu valodu varietāšu šķēlums arī ir valodu varietāte.*
- *Saka, ka valodu klase **C** ģenerē varietāti **V**, ja **V** ir mazākā varietāte, kas satur **C**.*

Valodu varietātes: piemēri

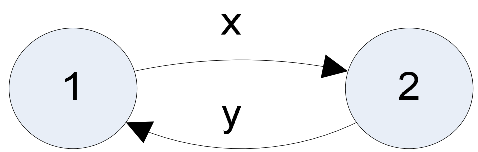
- Grupu varietāte **G**:
  min. det. automātā
  nav šādas konstrukcijas:
  Deterministic Reversible Automata,
  Measure-Once Quantum Finite Automata



$x \in A^*$

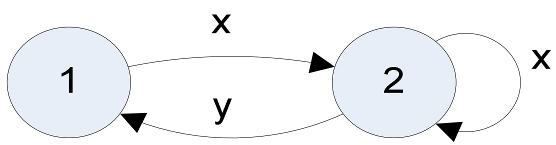
$1 \neq 2$

- Varietāte **R** (R-triviālas valodas):
  min. det. automātā
  nav šādas konstrukcijas:



$x,y \in A^*$, $1 \neq 2$

- Varietāte **R*G**:
  min. det. automātā
  nav šādas konstrukcijas:

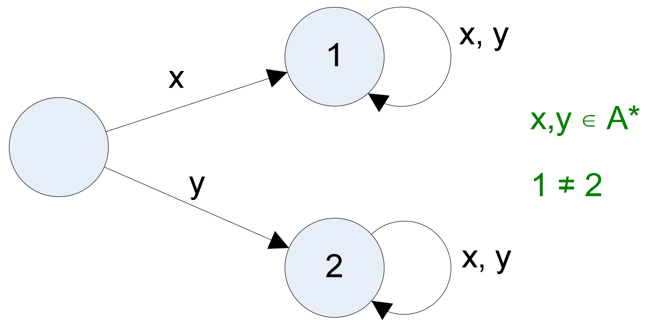


$x,y \in A^*$

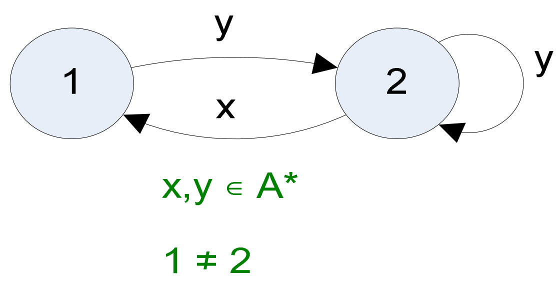
$1 \neq 2$

Valodu varietātes: piemēri

- Varietāte **L*G**:
  min. det. automātā
  nav šādas konstrukcijas:



- Varietāte **R*G**:
  min. det. automātā
  nav šādas konstrukcijas:



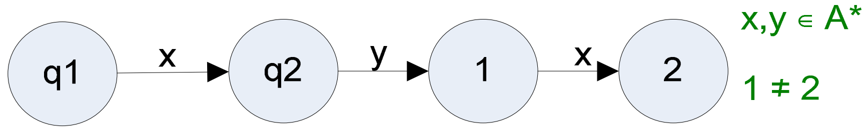
- Varietāte **BG = R*G ∩L*G**

  Classical Probabilistic Reversible Automata,

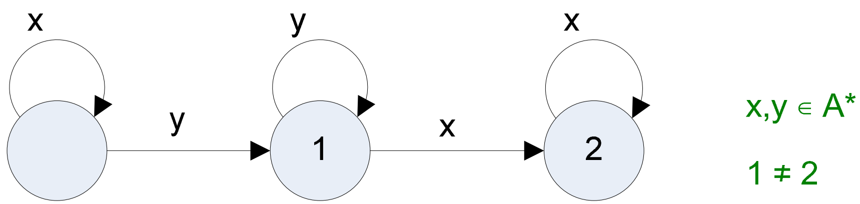
  Latvian Quantum Finite Automata

Valodu varietātes: piemēri

- Varietāte $\mathbf{R_1}$
  (R-triviālas
  idempotentas valodas):
  min. det. automātā nav šādas konstrukcijas.



- Varietāte $\mathbf{R_1 * G}$:
  min. det. automātā
  nav šādas konstrukcijas:

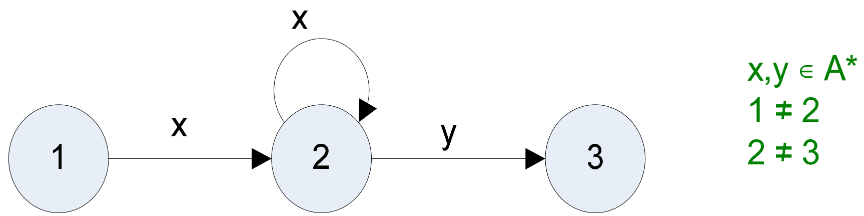


Automātu modeļi

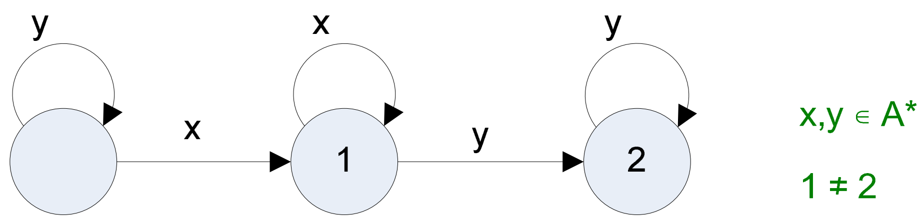
	“Classical” word acceptance	“Decide-and-halt” word acceptance
Deterministic Reversible Automata	Group Automata (GA) Klase: Grupu valodu varietāte	Reversible Finite Automata (RFA) [Ambainis and Freivalds]
Quantum Finite Automata with pure states	Measure-Once Quantum Finite Automata (MO-QFA) [Moore et al] Klase: Grupu valodu varietāte	Measure-Many Quantum Finite Automata (MM-QFA) [Kondacs and Watrous]
Probabilistic Reversible Automata	“Classical” Probabilistic Reversible Automata (C-PRA) [Golovkins and Kravtsev] Klase: **BG** valodu varietāte	“Decide-and-halt” Probabilistic Reversible Automata (DH-PRA) [Golovkins and Kravtsev]
Quantum Finite Automata with mixed states	Latvian Quantum Finite Automata (LQFA) [Ambainis et al, Golovkins and Kravtsev] Klase: **BG** valodu varietāte	Enhanced Quantum Finite Automata (EQFA) [Nayak]

Automāti ar apstādināšanu: RFA

- RFA pazīst valodu L tutd., ja tai atbilstošais min. det. automāts, nesatur sekojošu konstrukciju: [Ambainis, Freivalds 98]:

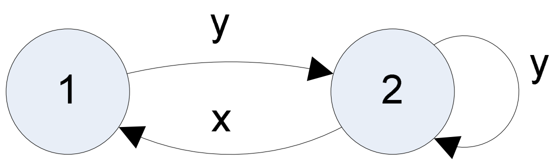


- RFA valodu Būla slēgums veido valodu varietāti $\mathbf{R_1{*}G}$ (RFA *ģenerē* $\mathbf{R_1{*}G}$).



Automāti ar apstādināšanu: MM-QFA, DH-PRA, EQFA

- Valodas nesatur sekojošo aizliegto konstrukciju:



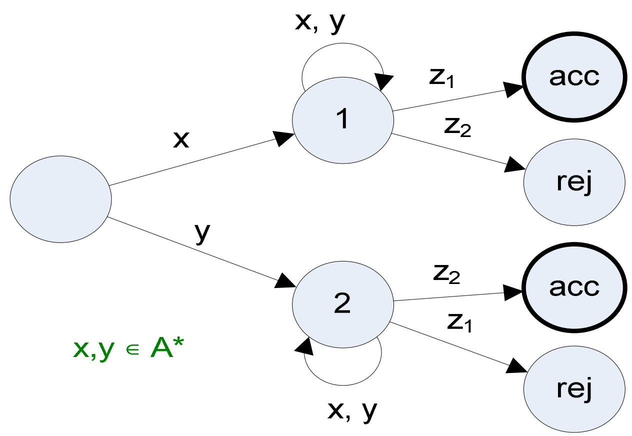
x,y ∊ A*, 1 ≠ 2

Līdz ar to tās ietilpst **R*G** varietātē.

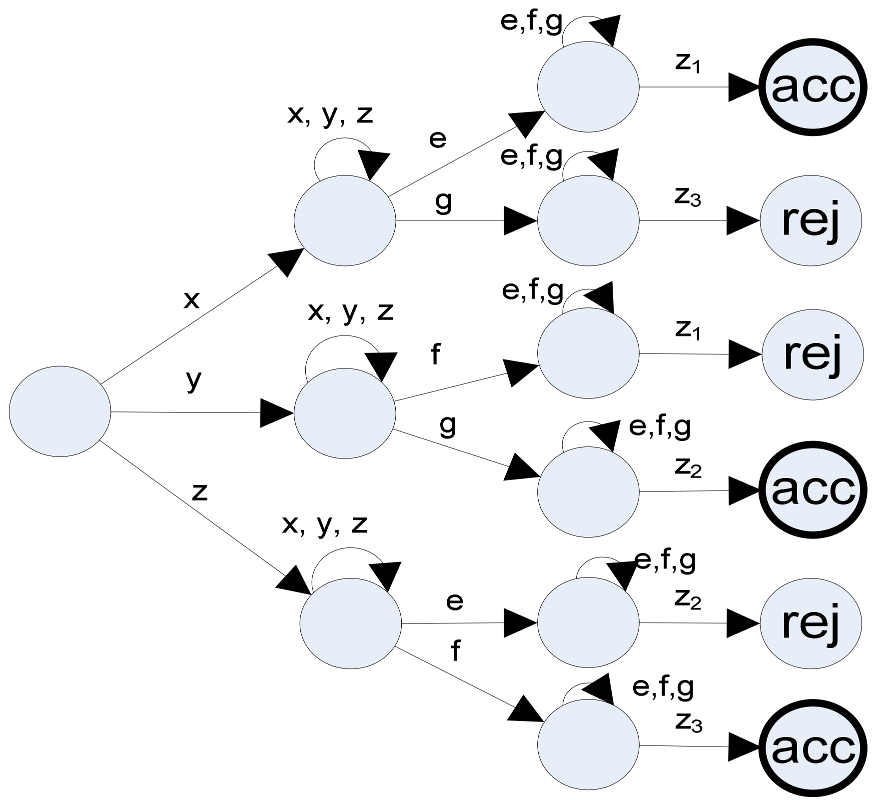
Automāti ar apstādināšanu: MM-QFA, DH-PRA, EQFA

- Nesatur virkni dažādu aizliegto konstrukciju (turpmāk – otrā tipa aizliegtās konstrukcijas), no kurām vienkāršākā ir sekojoša:
  [Ambainis et al., Golovkins et. al., Mercer]

  Šajā gadījumā nav būtiski, vai valodu pazīstošais aizliegto konstrukciju saturošais det. automāts ir minimāls.



Automāti ar apstādināšanu: aizliegtās konstrukcijas

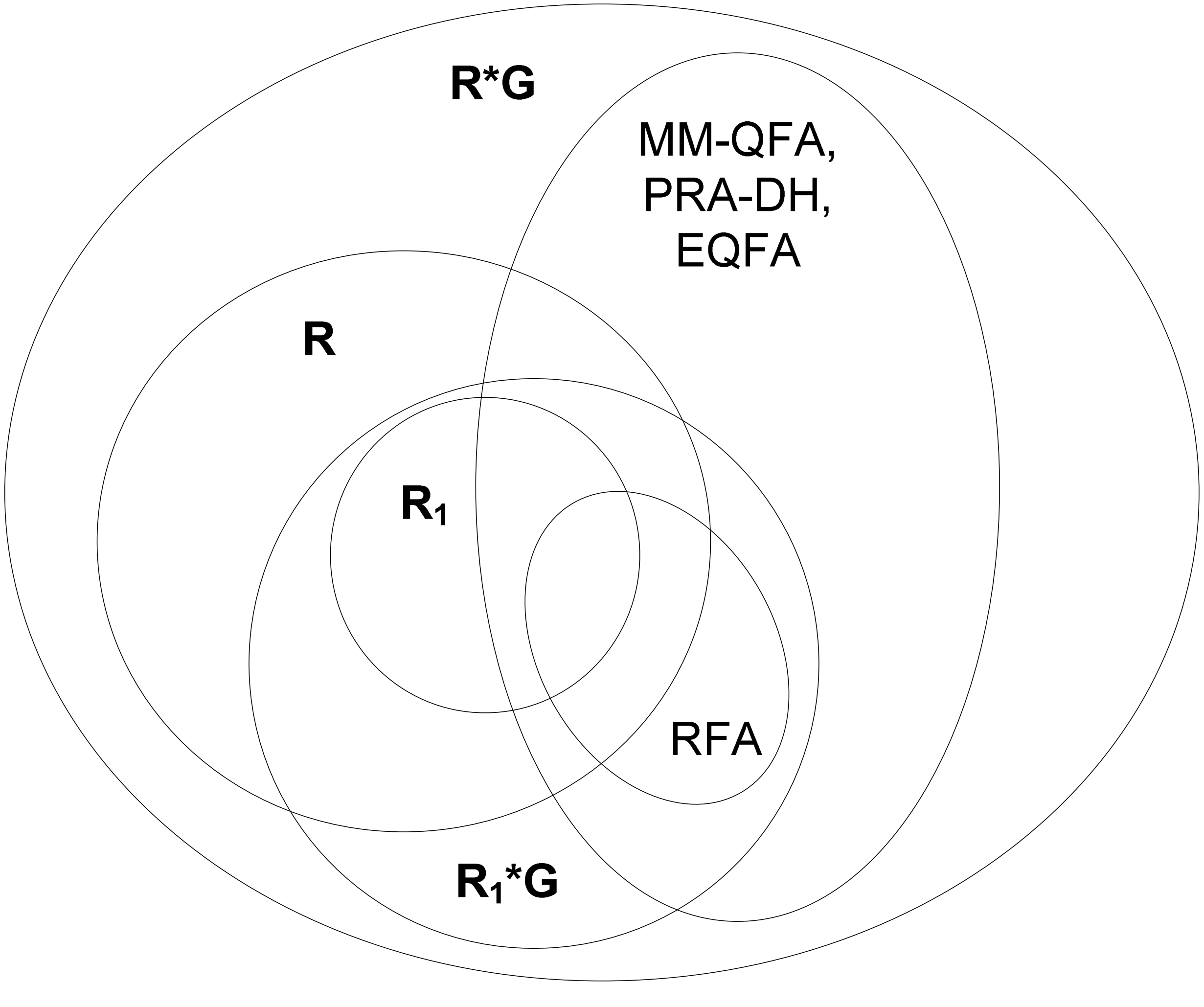


• Jebkuru Ambaiņa-Ķikusta-Valdata aizliegto konstrukciju var izteikt kā pretrunīgu nevienādību sistēmu

Automāti ar apstādināšanu: MM-QFA, DH-PRA, EQFA

Hipotēze. MM-QFA = DH-PRA = EQFA.

Automāti ar apstādināšanu: MM-QFA, DH-PRA, EQFA



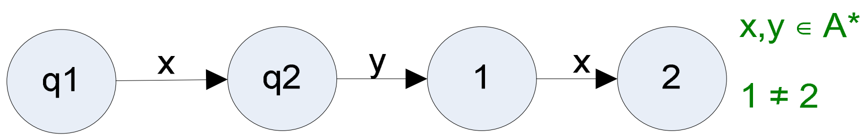
Automāti ar apstādināšanu: MM-QFA, DH-PRA, EQFA

Pētījuma vadlīnijas:

- Noteikt tās $\mathbf{R_1}$ valodas, kuras pazīst automāti ar apstādināšanu.
- Noteikt tās R-triviālās valodas un $\mathbf{R_1{*}G}$ valodas, kuras pazīst automāti ar apstādināšanu.
- Noteikt **R*G** valodas, kuras pazīst automāti ar apstādināšanu.

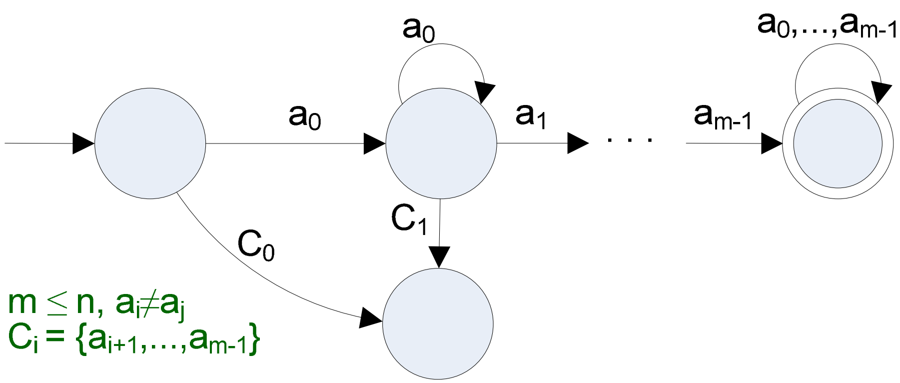
R-triviālas idempotentas valodas (R_1 valodas)

- Valodas, kas nesatur aizliegto konstrukciju:



- Jebkura R-triviāla idempotenta valoda alfabētā ar apjomu n ir sekojošu savstarpēji neškeļošos valodu apvienojums:

  $a_0 a_0{}^* a_1 (a_0,a_1)^* \ldots\ a_{m-1}(a_0,a_1,\ldots,\ a_{m-1})^*$, kur $m \leq n$ un $i \neq j \rightarrow a_i \neq a_j$



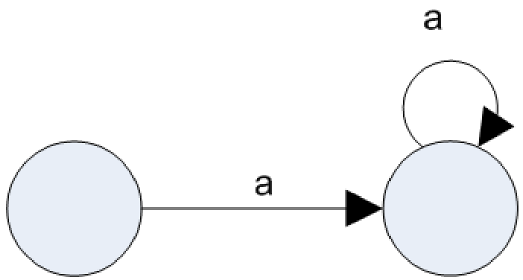
R-triviālas idempotentas valodas

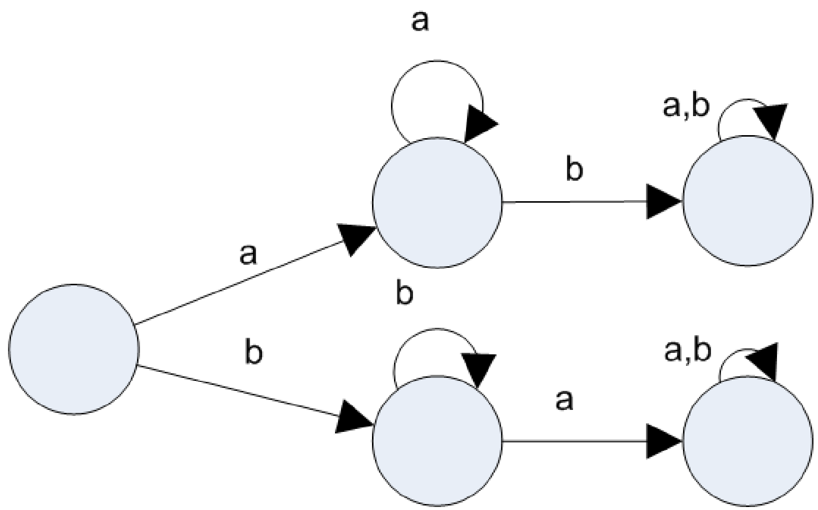
- Jebkura R-triviāla idempotenta valoda alfabētā A ir sekojošu valodu Būla slēgums:

  $B^*a_iA^*$, kur $B \subseteq A$ un $a_i \in A$.

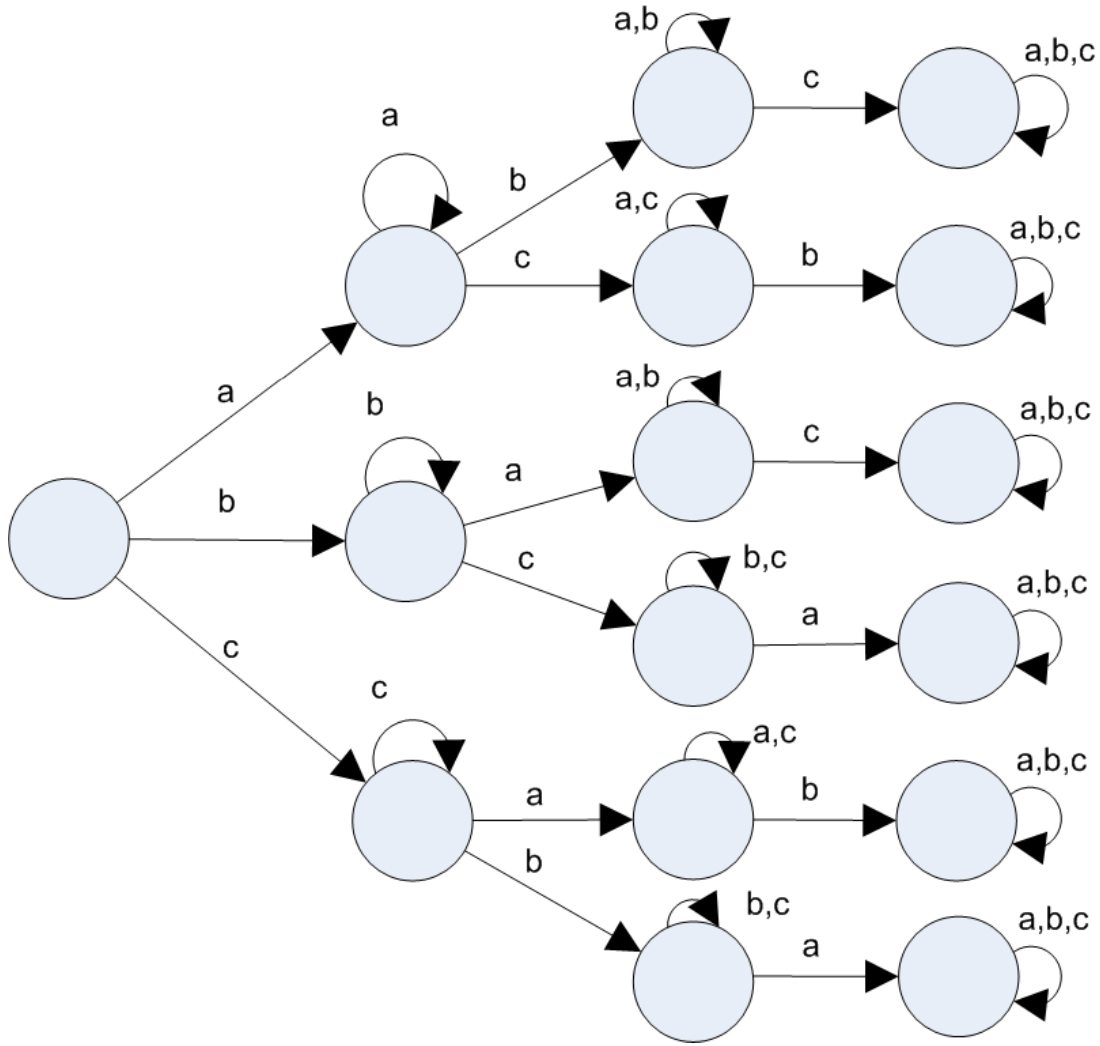
R-triviālas idempotentas valodas

- Eksistē determinēts galīgs automāts, kas pazīst jebkuru $\mathbf{R_1}$ valodu noteiktā alfabētā.





R-triviālas idempotentas valodas



R-triviālas idempotentas valodas: izsakāmo aizliegto konstrukciju kombinatoriāls raksturojums

"Vienā līmenī":

Apzīmēsim valodu $c_1c_1{}^*c_2\{c_1, c_2\}^*\ldots c_k\{c_1,\ldots c_k\}^*$ as $\mathbf{c_1c_2\ldots c_k}$.
Tādējādi $\mathbf{c_1c_2\ldots c_k}$ ir valoda, kamēr $c_1c_2\ldots c_k$ – simbolu virkne (vārds).

Teorēma 1. Ja $\mathbf{R_1}$ valoda L apmierina sekojošu nosacījumu, tad tā satur 2. tipa aizliegto konstrukciju:

Eksistē $\mathbf{R_1}$ valodu virkne,
$L_1= \mathbf{d_{11}d_{21}\ldots d_{k1,1}}$, $L_2= \mathbf{d_{12}d_{22}\ldots d_{k2,2}}$,..., $L_r =\mathbf{d_{1r}d_{2r}\ldots d_{kr,r}}$, tāda ka:
1) $L_1,L_2,\ldots L_r \subset L$;
2) eksistē i, tāds ka:
   a) vārdi $d_{11}d_{21}\ldots d_{i1}$, $d_{12}d_{22}\ldots d_{i2}$,...,$d_{1r}d_{2r}\ldots d_{ir}$, ir viens otra permutācijas;
   b) visiem j>1 $d_{1,j-1}d_{2,j-1}\ldots d_{i,j-1}d_{i+1,j}\ldots d_{kj,j} \notin L$ un $d_{1r}d_{2r}\ldots d_{ir}d_{i+1,1}\ldots d_{k1,1} \notin L$.

R-triviālas idempotentas valodas

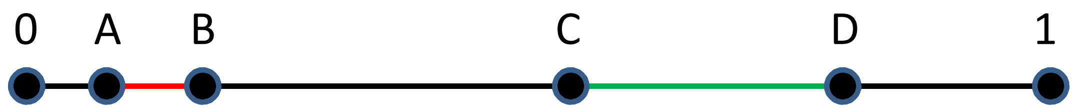
- 2 burtu alfabetā visas $\mathbf{R_1}$ valodas PRA-DH pazīst ar varbūtību 1-ε.
- Arī MM-QFA pazīst visas tās pašas valodas, ko PRA-DH.

MM-QFA

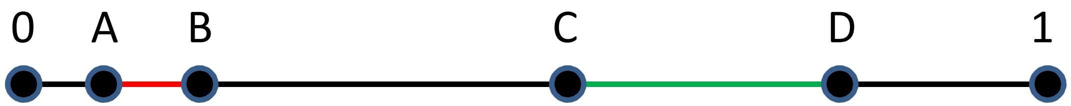
p_w – varbūtība, ar kādu automāts akceptē vārdu w.

$A = \inf\{p_w | w \notin L\}$, $B = \sup\{p_w | w \notin L\}$,

$C = \inf\{p_w | w \in L\}$, $D = \sup\{p_w | w \in L\}$.



MM-QFA



Pieņemsim, ka L_1 pazīst ar intervālu (A_1,B_1,C_1,D_1) un L_2 pazīst ar intervālu (A_2,B_2,C_2,D_2).

Tad eksistē automāts, kas pazīst $L_1 \cup L_2$, ja

$$(C_1 - B_1)(C_2 - B_2) > (B_1 - A_1)(B_2 - A_2);$$

un eksistē automāts, kas pazīst $L_1 \cap L_2$, ja

$$(C_1 - B_1)(C_2 - B_2) > (D_1 - C_1)(D_2 - C_2).$$

Automātu ar apstādināšanu konstrukcija

Dotas valodas $L_1, L_2, \ldots L_r$. Tad šo valodu Būla slēgums ir sekojoša kopa **C**:

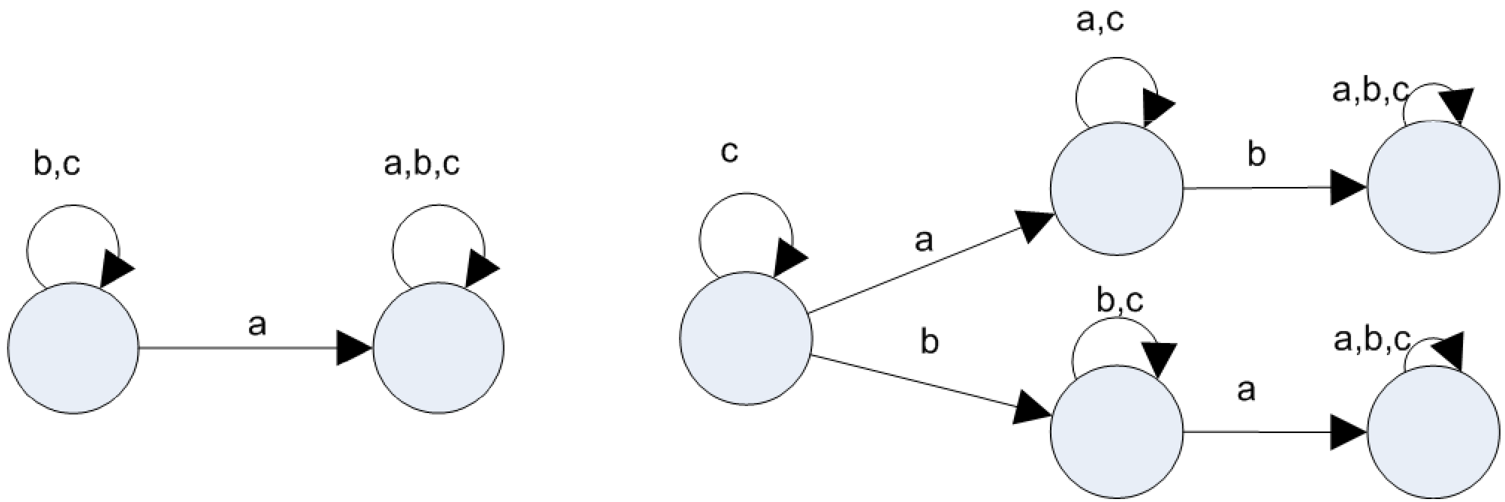
1) Visiem i $L_i \in$ **C**;
2) Ja $A, B \in$ **C**, tad $A`$, $A \cup B$, $A \cap B \in$ **C**.

Vienpusējs Būla slēgums (vai kas tāds ir sastapts literatūrā?):

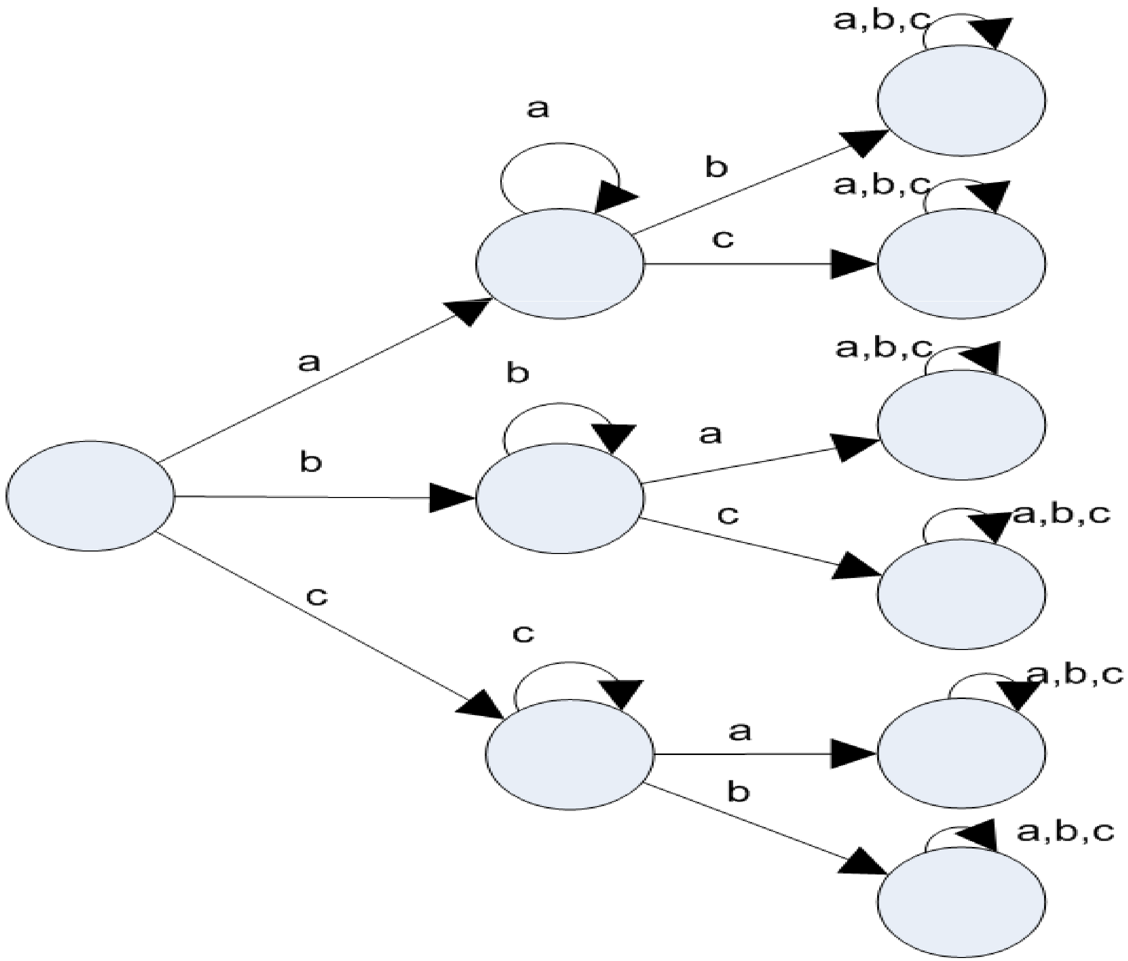
Iepriekšminēto valodu vienpusējs Būla slēgums ir sekojoša kopa **D**:

1) Visiem i $L_i \in$ **D**;
2) Ja $A \in$ **D**, tad $A` \in$ **D** un visiem i $A \cup L_i$, $A \cap L_i \in$ **D**.

Automātu ar apstādināšanu konstrukcija $\mathbf{R_1}$ valodām



Automātu ar apstādināšanu konstrukcija $\mathbf{R_1}$ valodām



Automātu ar apstādināšanu konstrukcija: Kopsavilkums

Ja automāti ar apstādināšanu valodas $L_1, L_2, \ldots L_r$ pazīst ar varbūtību 1-ε, tad tie pazīst jebkuru valodu no tikko minēto valodu vienpusējā Būla slēguma.

Hipotēze. Eksistē R-triviālas idempotentas valodas $L_1, L_2, \ldots L_r$, tādas ka PRA-DH tās pazīst ar varbūtību 1-ε, un šo valodu vienpusējs Būla slēgums satur jebkuru R-triviālu idempotentu valodu, kas nesatur 2. tipa aizliegtās konstrukcijas.

Hipotēze ir apstiprinājusies R_1 valodām 3 burtu alfabētā.

Ir zināms, kādas ir hipotēzei atbilstošās valodas R_1 valodām jebkāda izmēra alfabētā.

Analoģisku hipotēzi iespējams izvirzīt arī par R-triviālām valodām un **R*G** valodām.

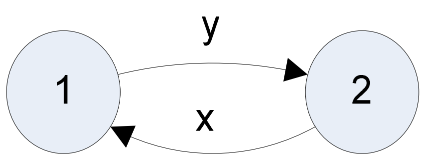
Automāti ar apstādināšanu: MM-QFA, DH-PRA, EQFA

Pētījuma vadlīnijas:

- Noteikt tās $\mathbf{R_1}$ valodas, kuras pazīst automāti ar apstādināšanu.
- Noteikt tās R-triviālās valodas un $\mathbf{R_1{*}G}$ valodas, kuras pazīst automāti ar apstādināšanu.
- Noteikt **R*G** valodas, kuras pazīst automāti ar apstādināšanu.

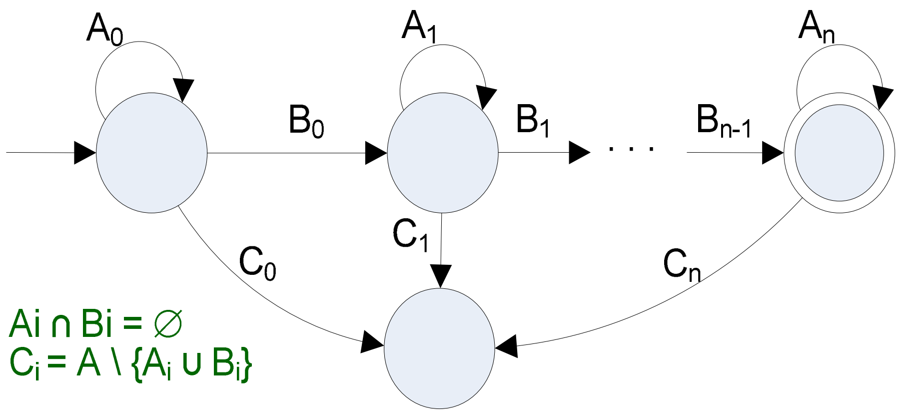
R-triviālas valodas

- Valodas, kas nesatur aizliegto konstrukciju:



$x,y \in A^*$, $1 \neq 2$

- Jebkura R-triviāla valoda ir sekojošu savstarpēji nešķeļošos valodu apvienojums:



$A_i \cap B_i = \varnothing$
$C_i = A \setminus \{A_i \cup B_i\}$

Automāti ar apstādināšanu: MM-QFA, DH-PRA, EQFA

- Teorēma 2. MM-QFA valodu Būla slēgums satur jebkuru R-triviālu valodu. Analoģiski, arī DH-PRA un EQFA ģenerē jebkuru R-triviālu valodu.

Rezultāti uz šo brīdi

- Jebkura aizliegtā konstrukcija izsakāma kā pretrunīga nevienādību sistēma;
- Kombinatoriāls nosacījums, kad $\mathbf{R_1}$ valodas veido aizliegtās konstrukcijas;
- MM-QFA, PRA-DH, EQFA ģenerē jebkuru R-triviālu valodu;
- PRA-DH valodu pazīšana ar MM-QFA.