

Meklēšana ar kvantu klejošanu 2D režģī bez amplitūdas amplifikācijas

Datorikas fakultāte
Latvijas Universitāte

Aleksandrs Rivošs
un Nikolajs Nahimovs

Ratnieki, 2011



Eiropas Sociālā fonda projekts

“Datorzinātnes pielietojumi un tās saiknes ar kvantu fiziku”

Nr.2009/0216/1DP/1.1.1.2.0/09/APIA/VIAA/044

Gadījumu klejošana (pavisam īss ieskats)



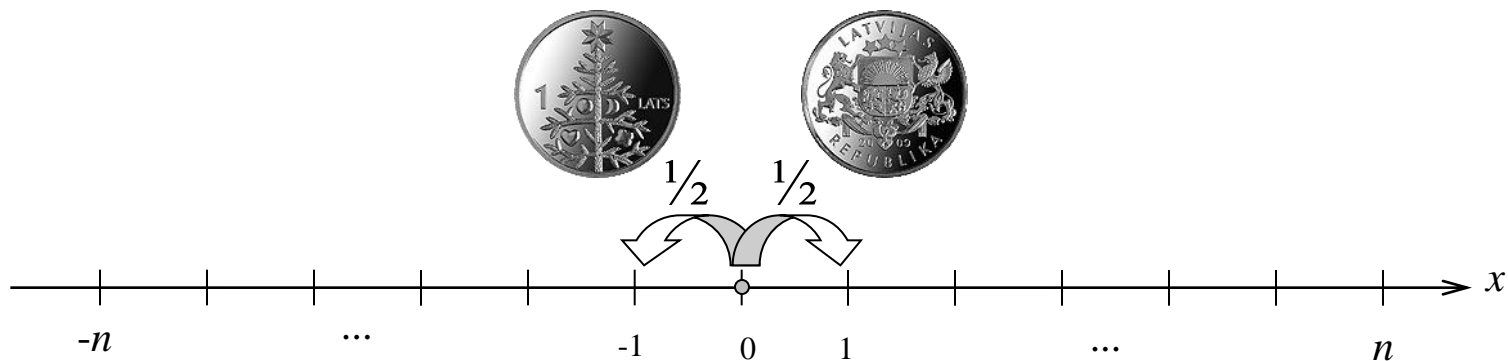
Eiropas Sociālā fonda projekts

“Datorzinātnes pielietojumi un tās saiknes ar kvantu fiziku”

Nr.2009/0216/1DP/1.1.1.2.0/09/APIA/VIAA/044

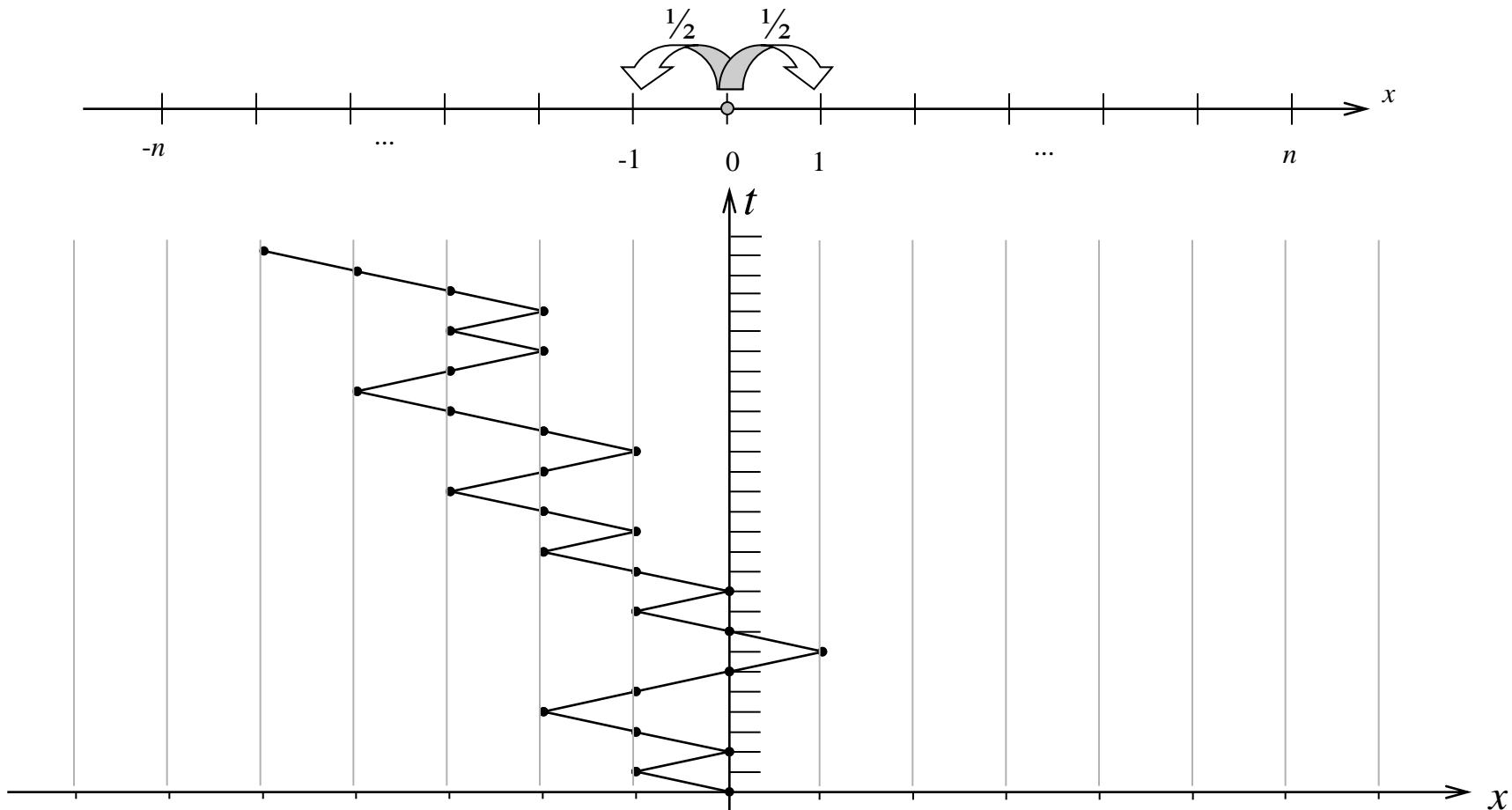
Gadījuma klejošana taisnē

- Klasiskā gadījumu klejošana taisnē
 - Sākam punktā $x=0$
 - Katrā solī:
 - ar varbūtību $1/2$ – pārvietojamies pa labi *)
 - ar varbūtību $1/2$ – pārvietosimies pa kreisi



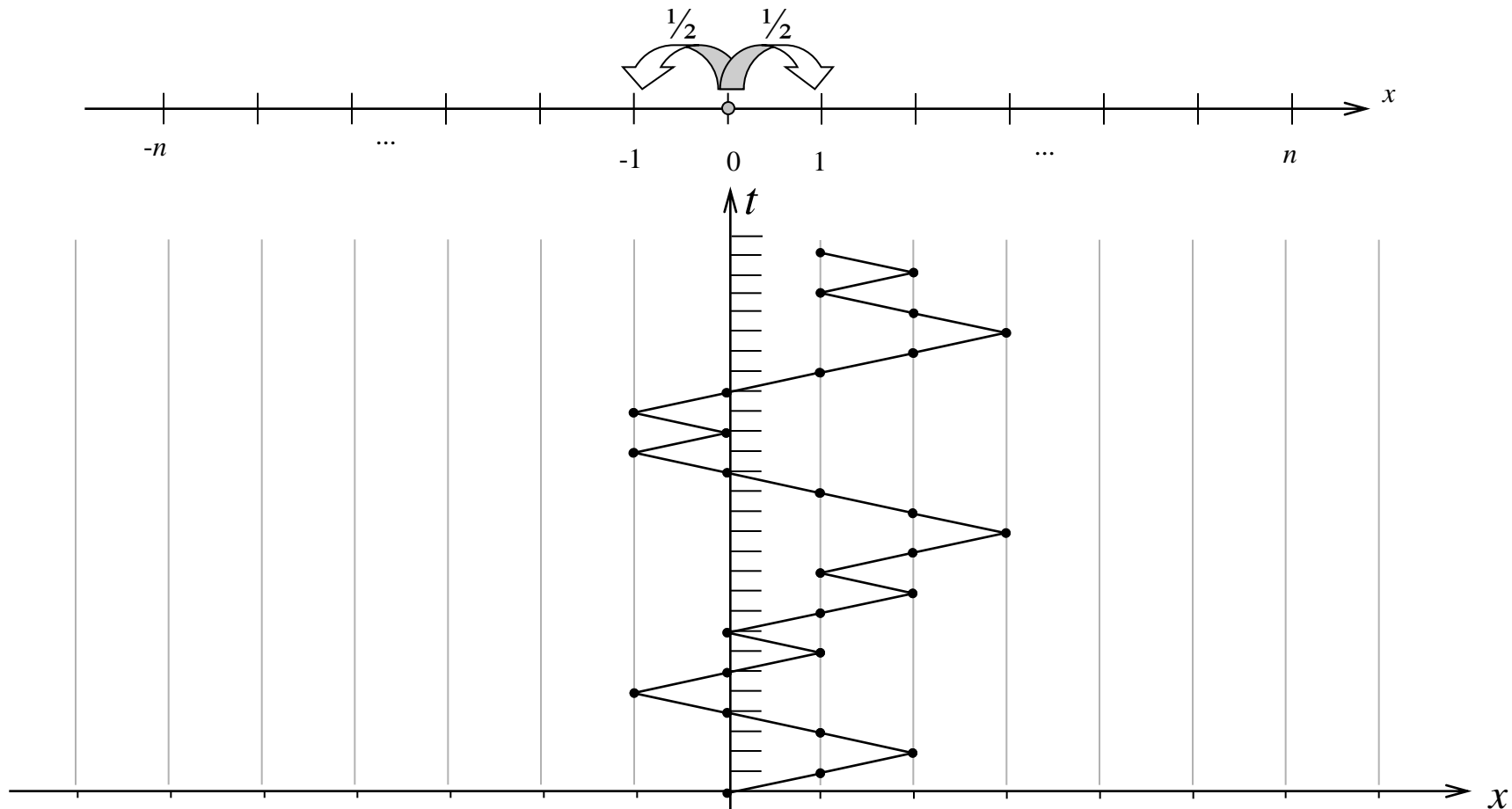
*) Laiks un telpa – diskrētie

Gadījuma klejošana taisnē



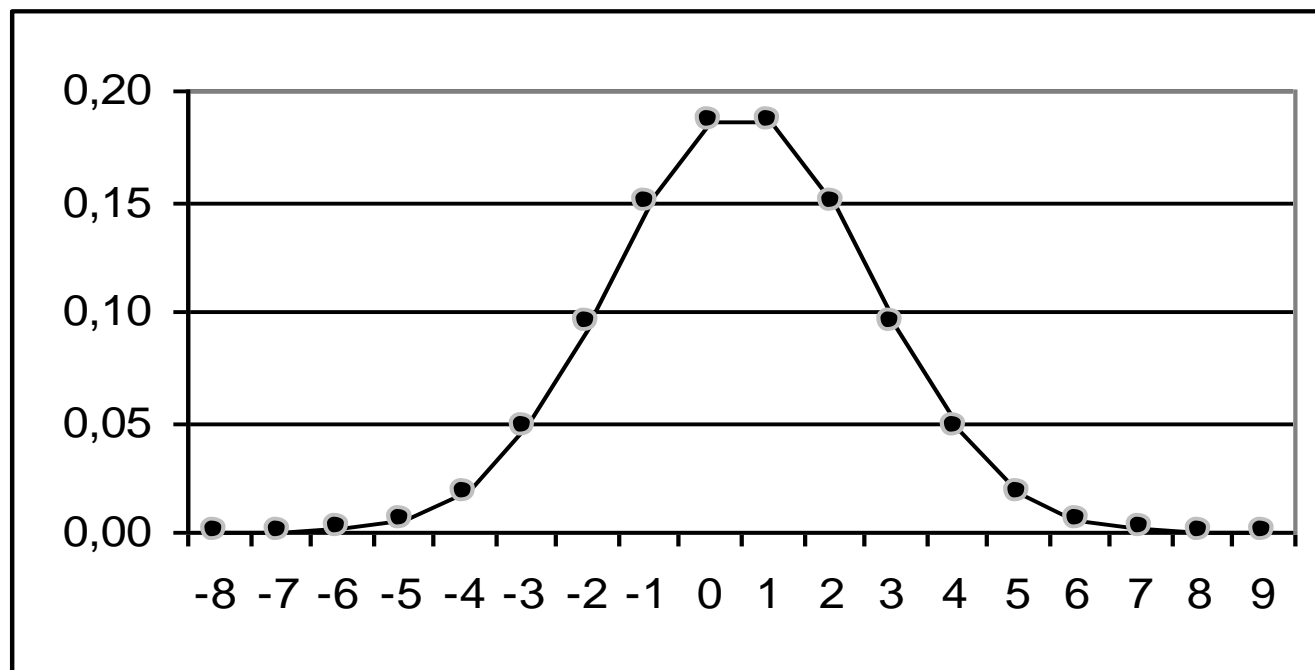
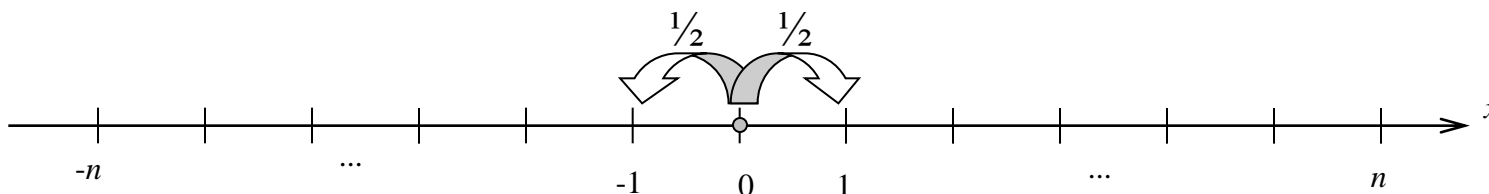
Gadījuma klejošanas piemērs

Gadījuma klejošana taisnē



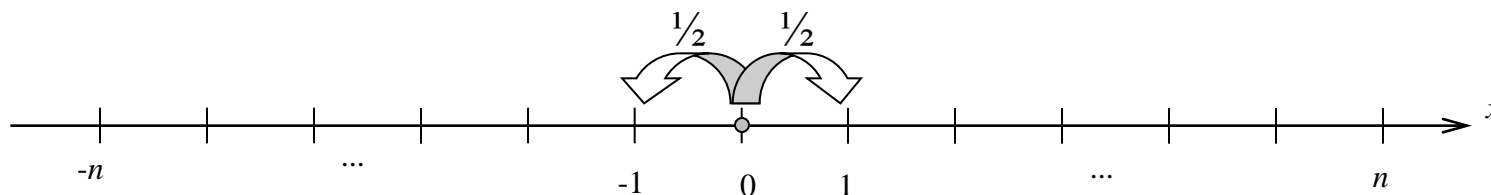
Gadījuma klejošanas piemērs

Gadījuma klejošana taisnē



Varbūtība atrasties noteiktajā pozīcijā

Gadījuma klejošana taisnē



$T \backslash i$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0						1					
1					$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$				
2				$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$			
3			$\frac{1}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{1}{8}$		
4		$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{16}$	
5	$\frac{1}{32}$		$\frac{5}{32}$		$\frac{5}{16}$		$\frac{5}{16}$		$\frac{5}{32}$		$\frac{1}{32}$

Below the table, a bracket spans from the column $i = -3$ to $i = 3$ for the row $T = 5$.

Varbūtība atrasties pozīcijā i pēc T soļiem, veicot gadījuma klejošanu uz taisnes (ja sākam pozīcijā 0).

Kvantu klejošana



Eiropas Sociālā fonda projekts

“Datorzinātnes pielietojumi un tās saiknes ar kvantu fiziku”

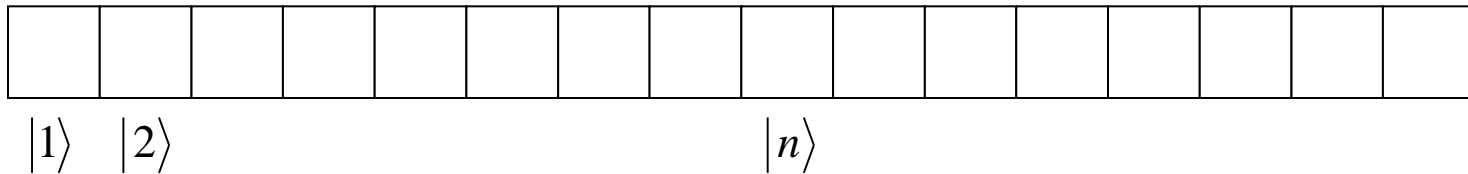
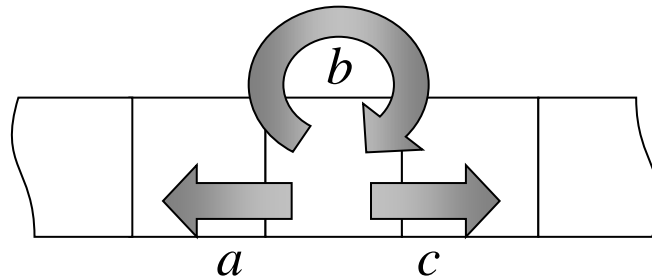
Nr.2009/0216/1DP/1.1.1.2.0/09/APIA/VIAA/044

Vēsture

- Y. Aharonov, L. Davidovich and N. Zagury
“Quantum random walks”
Phys. Rev. A, 48(2):1687–1690, 1993
 - D.Aharonov, A.Ambainis, J.Kempe, U.Vazirani.
“Quantum walks on graphs”. ACM, 2001.
arXiv:qunat-ph/0012090
 - J.Kempe. **“Quantum walks on graphs”**. 2003.
“Quantum random walks - an introductory overview”
-

Definējam kvantu klejošanu vienā dimensijā

$$|n\rangle \rightarrow a|n-1\rangle + b|n\rangle + c|n+1\rangle$$

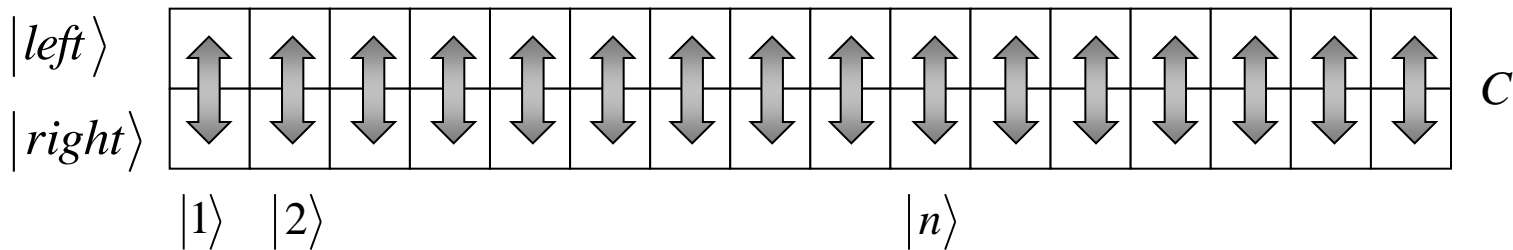


$$\left[\begin{array}{l} |a| = 1, \quad b = c = 0; \\ |b| = 1, \quad a = c = 0; \\ |c| = 1, \quad a = b = 0; \end{array} \right.$$

Tikai triviālas unitāras transformācijas

“Monētas mešanas” transformācija C

$$\begin{aligned} C|n, left\rangle &= a|n, left\rangle + b|n, right\rangle, \\ C|n, right\rangle &= c|n, left\rangle + d|n, right\rangle. \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \leftarrow \text{unitāra matrica}$$



Piemēram:

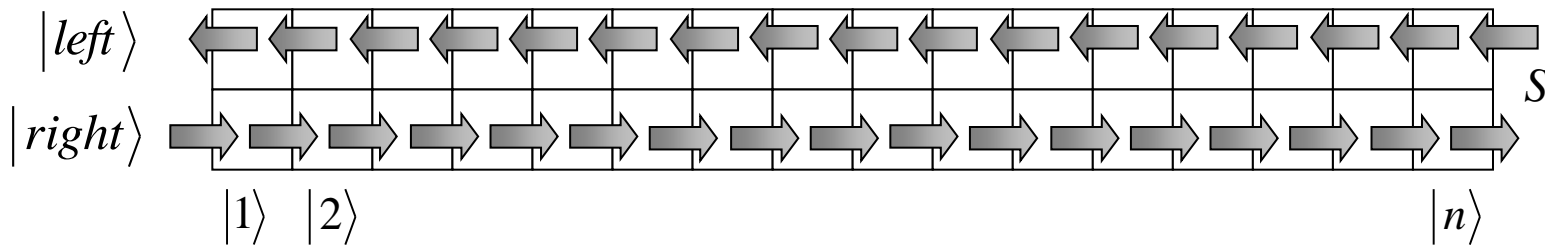
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \leftarrow \text{Hadamard transformācija}$$

Nobīdes transformācija S

unitāra transformācija

$$S|n, left\rangle = |n+1, left\rangle$$

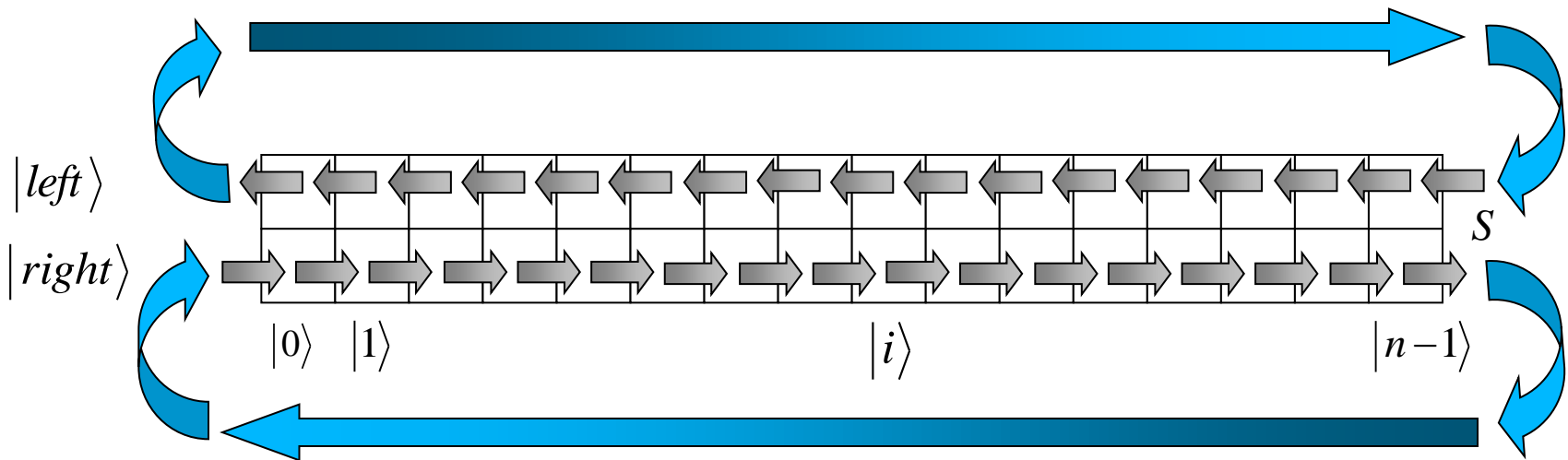
$$S|n, right\rangle = |n-1, right\rangle$$



Nobīdes transformācija S

$$S|i, left\rangle = |(i+1) \bmod n, left\rangle$$
$$S|i, right\rangle = |(i-1) \bmod n, right\rangle$$

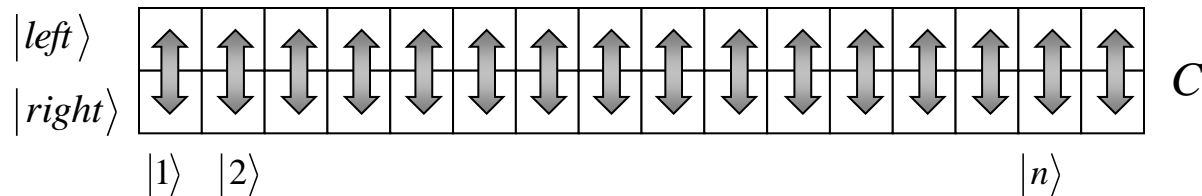
unitāra transformācija



Definējam kvantu klejošanu uz taisnes

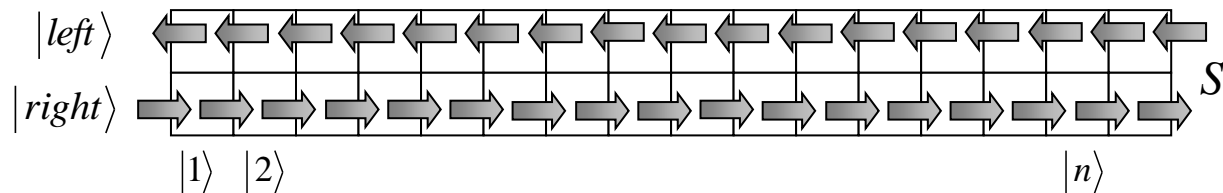
■ “Monētas mešanas” transformācija

$$\begin{aligned}
 C|n, left\rangle &= a|n, left\rangle + b|n, right\rangle, \\
 C|n, right\rangle &= c|n, left\rangle + d|n, right\rangle.
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$



■ Nobīdes transformācija

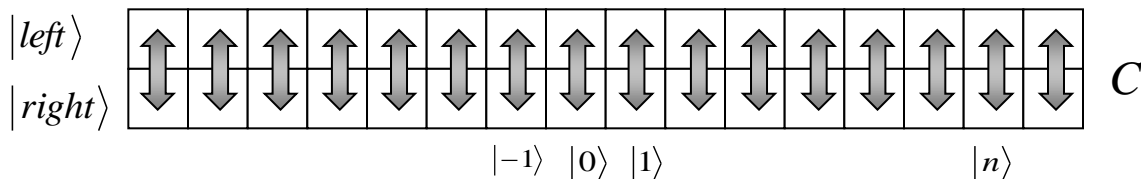
$$\begin{aligned}
 S|n, left\rangle &= |n+1, left\rangle \\
 S|n, right\rangle &= |n-1, right\rangle
 \end{aligned}$$



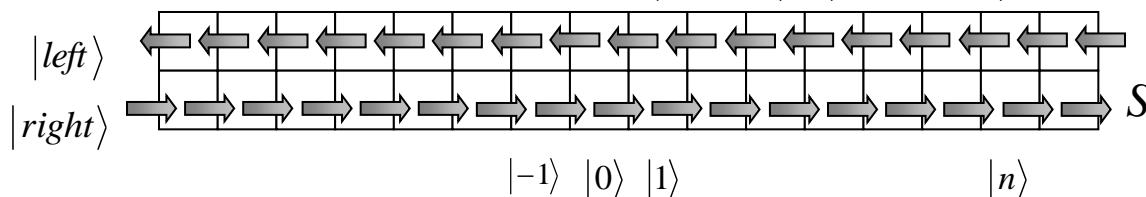
Kvantu klejošana uz taisnes

atkārtot

- “Monētas mešanas” transformācija: $C|n, left\rangle = a|n, left\rangle + b|n, right\rangle$, $C|n, right\rangle = c|n, left\rangle + d|n, right\rangle$. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$



- Nobīdes transformācija: $S|n, left\rangle = |n+1, left\rangle$
 $S|n, right\rangle = |n-1, right\rangle$



Šis sadalījums sāk atšķirties no klasiskā gadījuma jau pie $T = 3$

$T \setminus i$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0						1					
1					$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$				
2				$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$			
3			$\frac{1}{8}$		$\frac{5}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		
4		$\frac{1}{16}$		$\frac{5}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{16}$	
5	$\frac{1}{32}$		$\frac{17}{32}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{5}{32}$		$\frac{1}{32}$

Varbūtība atrasties pozīcijā i pēc T soļiem, veicot kvantu klejošanu uz taisnes ar sākumstāvokli:

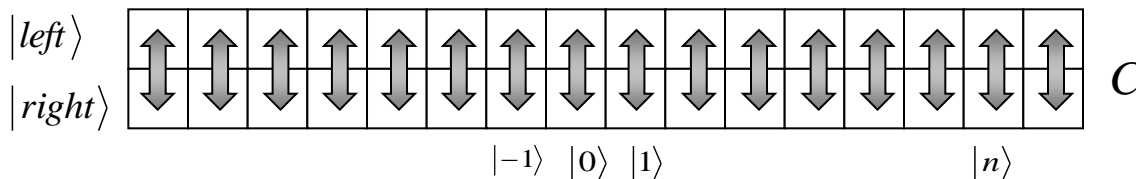
$$|\Psi_{init}\rangle = |0, left\rangle$$

Šī kvantu klejošana dod asimetrisku sadalījumu

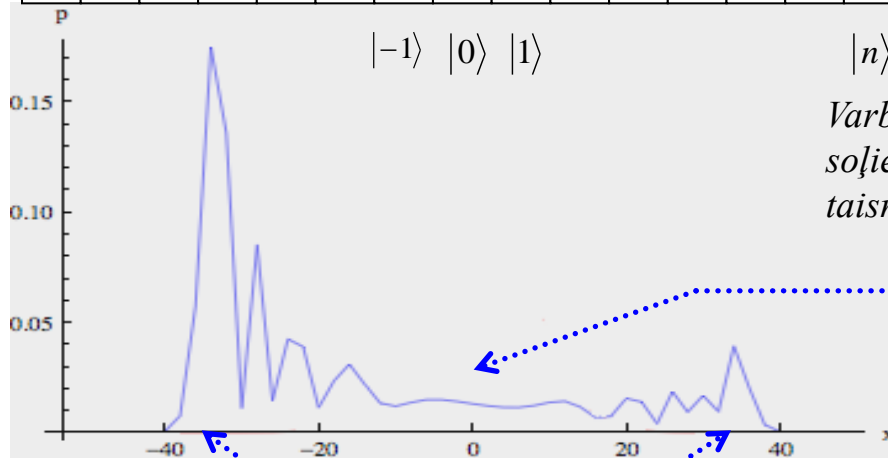
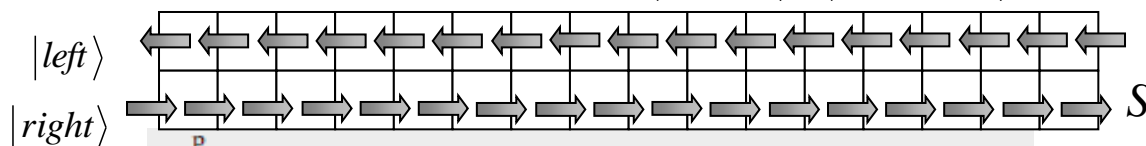
Kvantu klejošana uz taisnes

atkārtot

- “Monētas mešanas” transformācija: $C|n, left\rangle = a|n, left\rangle + b|n, right\rangle$, $C|n, right\rangle = c|n, left\rangle + d|n, right\rangle$. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$



- Nobīdes transformācija: $S|n, left\rangle = |n+1, left\rangle$
 $S|n, right\rangle = |n-1, right\rangle$



Varbūtība atrasties pozīcijā i pēc 50 soļiem, veicot kvantu klejošanu uz taisnes ar sākumstāvokli:

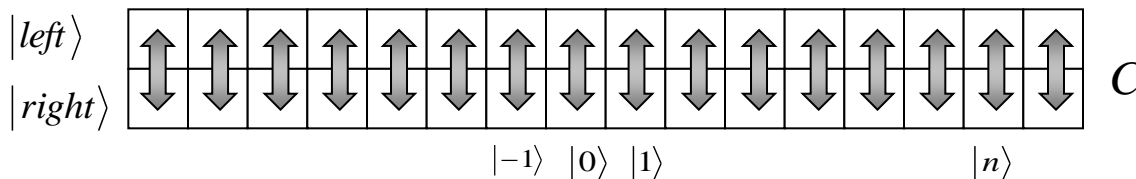
$$|\Psi_{init}\rangle = |0, left\rangle$$

Sadalījums šai kvantu klejošanai ir asimetrisks

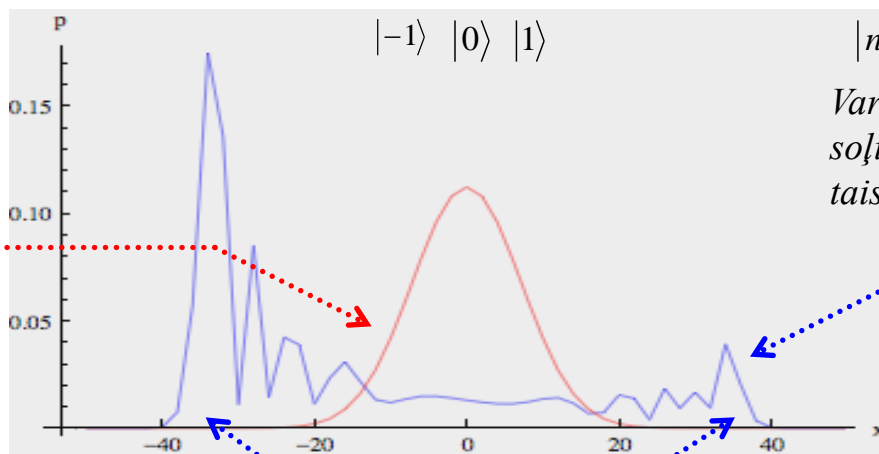
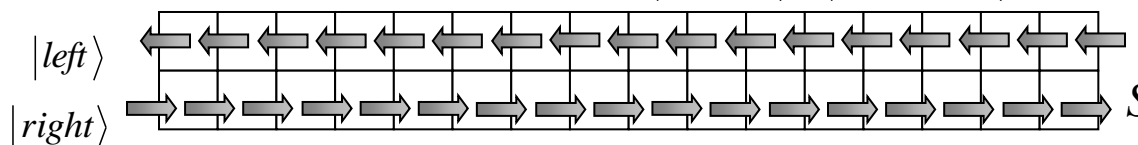
Kvantu klejošana uz taisnes

atkārtot

- “Monētas mešanas” transformācija: $C|n, left\rangle = a|n, left\rangle + b|n, right\rangle$, $C|n, right\rangle = c|n, left\rangle + d|n, right\rangle$. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$



- Nobīdes transformācija: $S|n, left\rangle = |n+1, left\rangle$
 $S|n, right\rangle = |n-1, right\rangle$



Salīdzinājums ar klasisko gadījuma klejošanu

Varbūtība atrasties pozīcijā i pēc 50 soļiem, veicot kvantu klejošanu uz taisnes ar sākumstāvokli:

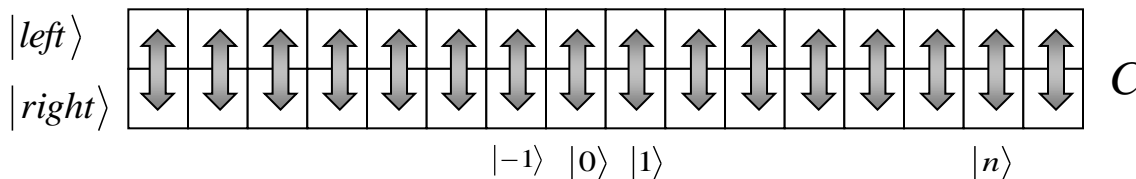
$$|\Psi_{init}\rangle = |0, left\rangle$$

Šī kvantu klejošana dod asimetrisku sadalījumu

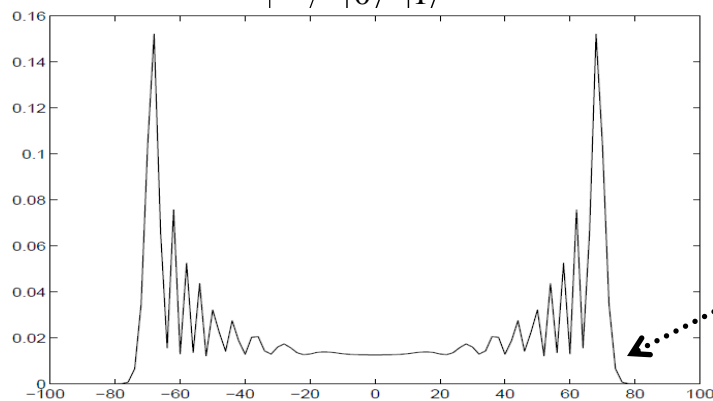
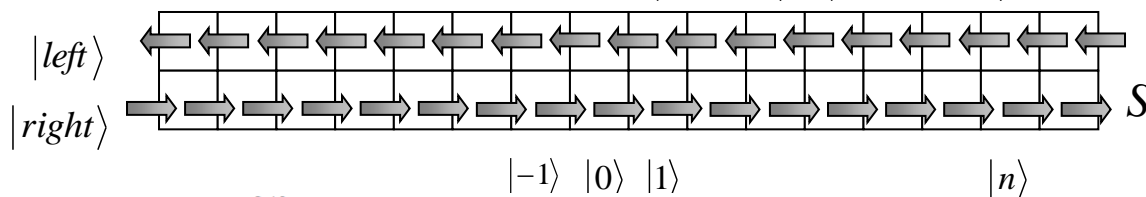
Kvantu klejošana uz taisnes

atkārtot

- “Monētas mešanas” transformācija: $C|n, left\rangle = a|n, left\rangle + b|n, right\rangle$, $C|n, right\rangle = c|n, left\rangle + d|n, right\rangle$. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = Y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$



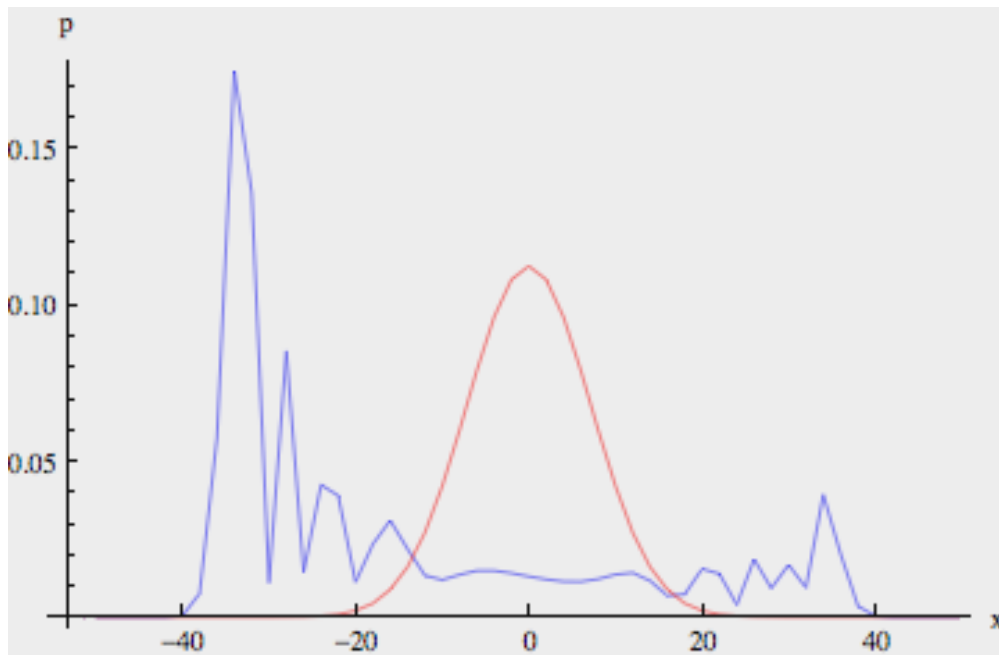
- Nobīdes transformācija: $S|n, left\rangle = |n+1, left\rangle$, $S|n, right\rangle = |n-1, right\rangle$



The probability distribution obtained from a computer simulation of the quantum walk with a symmetric “coin flip” transformation (Y).

The number of steps in the walk was taken to be 100. Only the probability at the even points is plotted.

Daži secinājumi

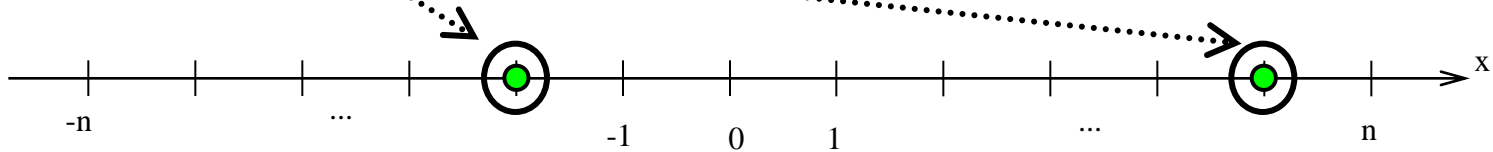


... nu un?

- *Varbūtība atrasties i -ajā pozīcijā pēc 50 kvantu klejošanas soļiem uz taisnes*
- *Varbūtība atrasties i -ajā pozīcijā pēc 50 klasiskās gadījumu klejošanas uz taisnes*

Kvantu klejošana kā meklēšanas algoritms

leviesīsim dažus
izņēmumu punktus



- “Monētas mešanas” transformācija: $C|n, left\rangle = a|n, left\rangle + b|n, right\rangle$,
 $C|n, right\rangle = c|n, left\rangle + d|n, right\rangle$.

visos “neizņēmumu” punktos:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = Y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

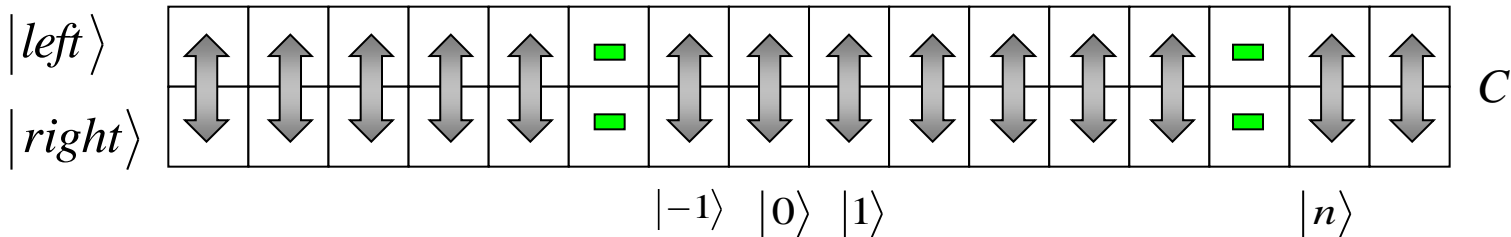
visos “izņēmumu” punktos:

$$\begin{pmatrix} a_m & b_m \\ c_m & d_m \end{pmatrix} = -I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Nobīdes transformācijas: $S|n, left\rangle = |n+1, left\rangle$
 $S|n, right\rangle = |n-1, right\rangle$

atkārtot

Kvantu klejošana kā meklēšanas algoritms



- “Monētas mešanas” transformācija: $C|n, left\rangle = a|n, left\rangle + b|n, right\rangle$,
 $C|n, right\rangle = c|n, left\rangle + d|n, right\rangle$.

visos “neizņēmuma” punktos:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = Y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

visos “izņēmumu” punktos:

$$\begin{pmatrix} a_m & b_m \\ c_m & d_m \end{pmatrix} = -I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Nobīdes transformācija: $S|n, left\rangle = |n+1, left\rangle$
 $S|n, right\rangle = |n-1, right\rangle$

atkārtot

Pārejam no taisnes uz plakni



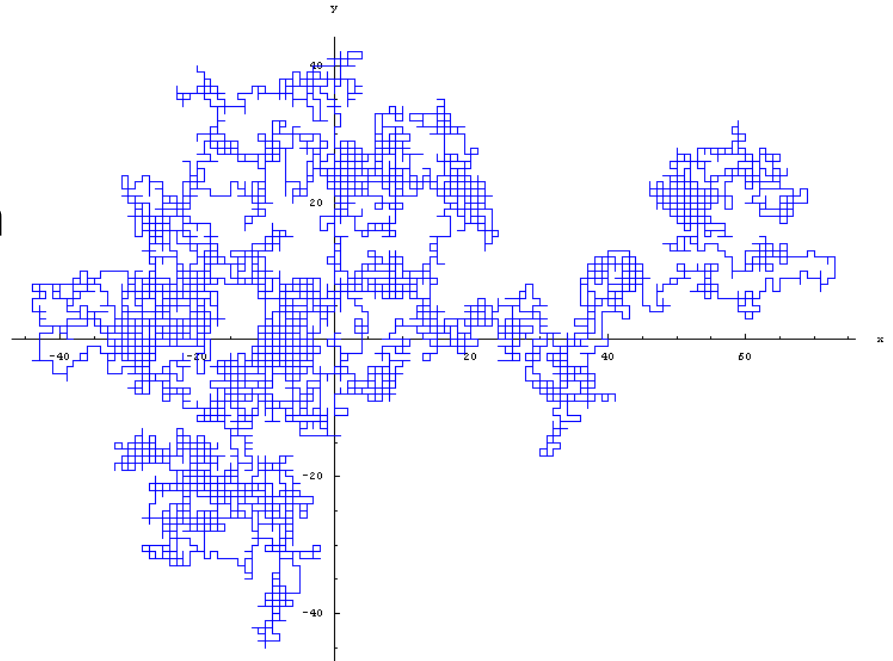
Eiropas Sociālā fonda projekts

“Datorzinātnes pielietojumi un tās saiknes ar kvantu fiziku”

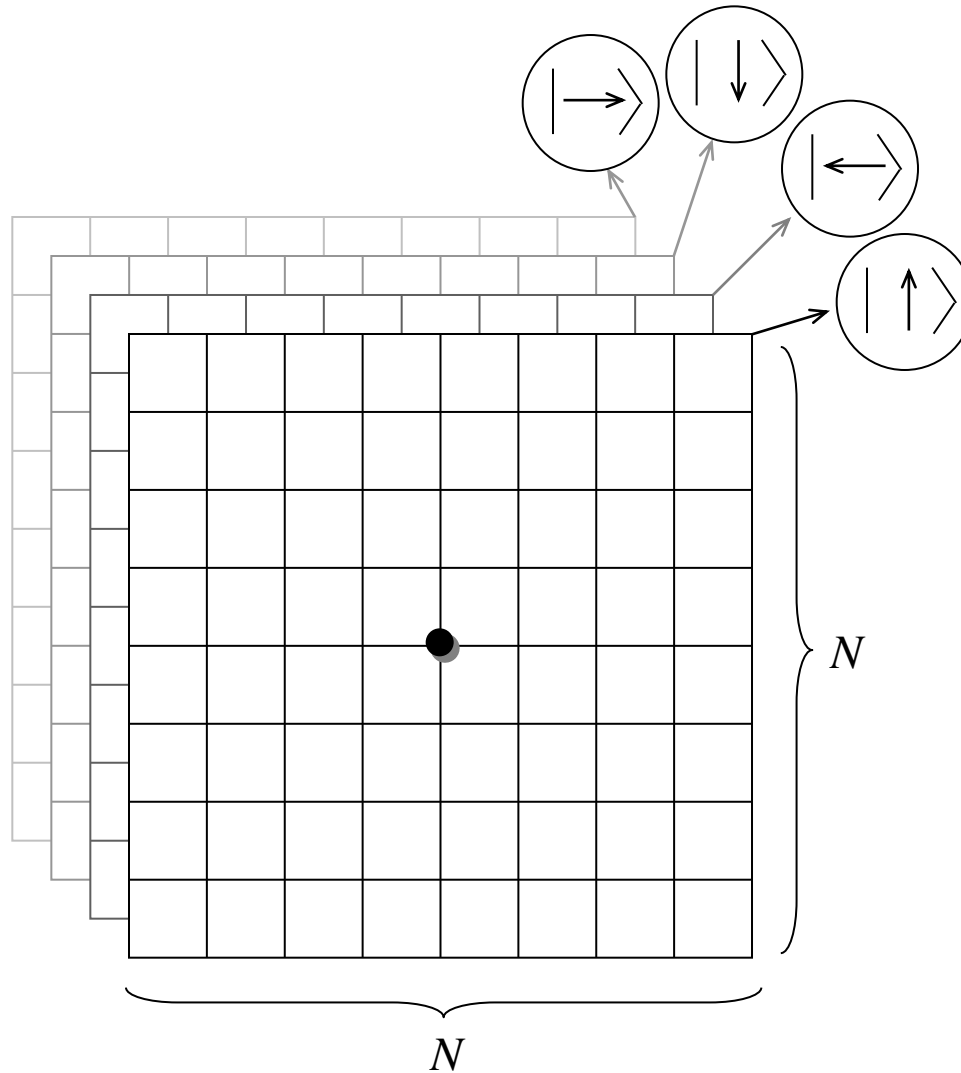
Nr.2009/0216/1DP/1.1.1.2.0/09/APIA/VIAA/044

Gadījumu klejošana plaknē

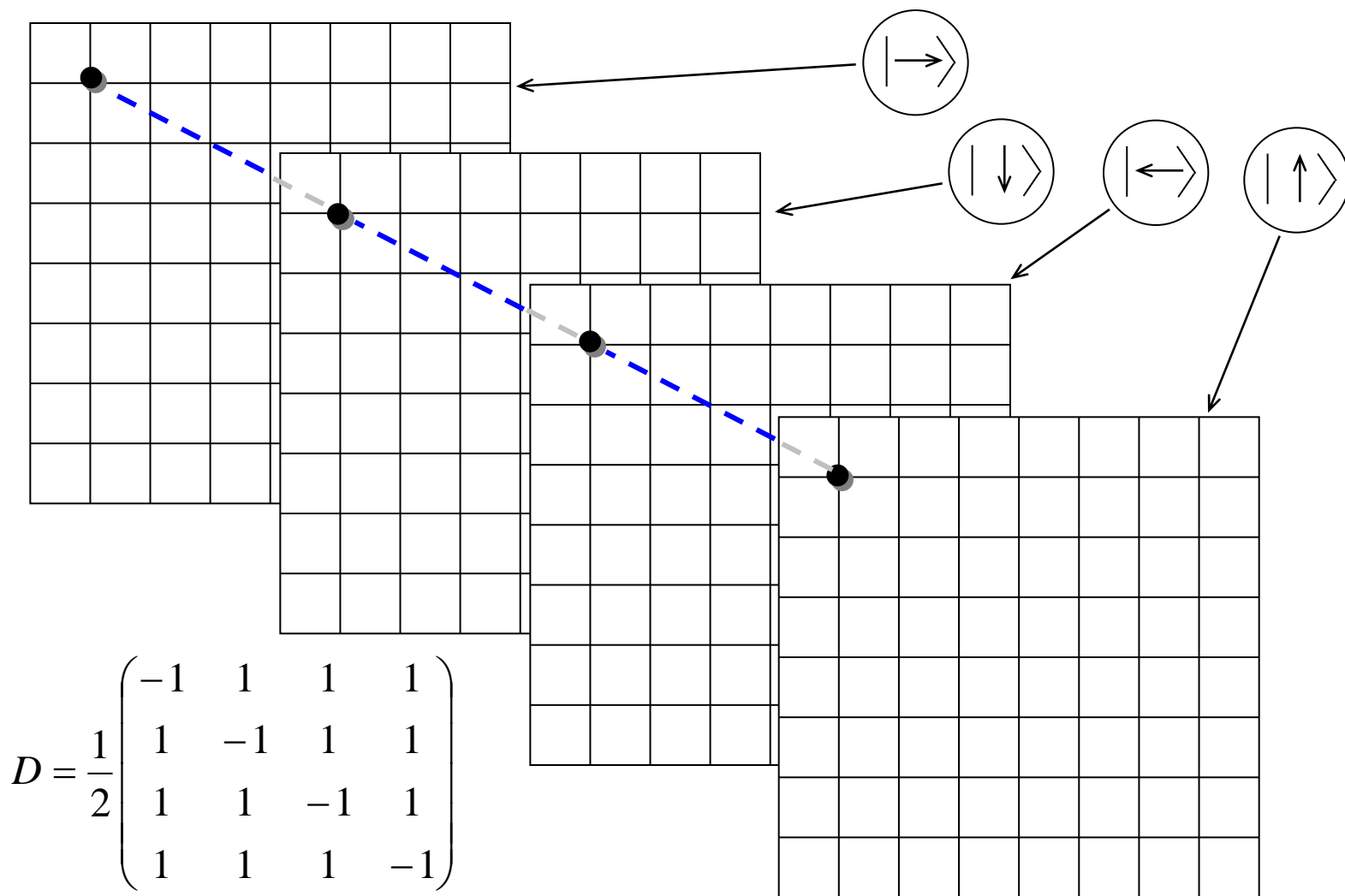
- Klasiskā gadījumu klejošana plaknē
 - Sākas pozīcijā $(0; 0)$
 - Ar varbūtību $1/4$ seko vienam no četriem virzieniem



Definējam kvantu klejošanu plaknē

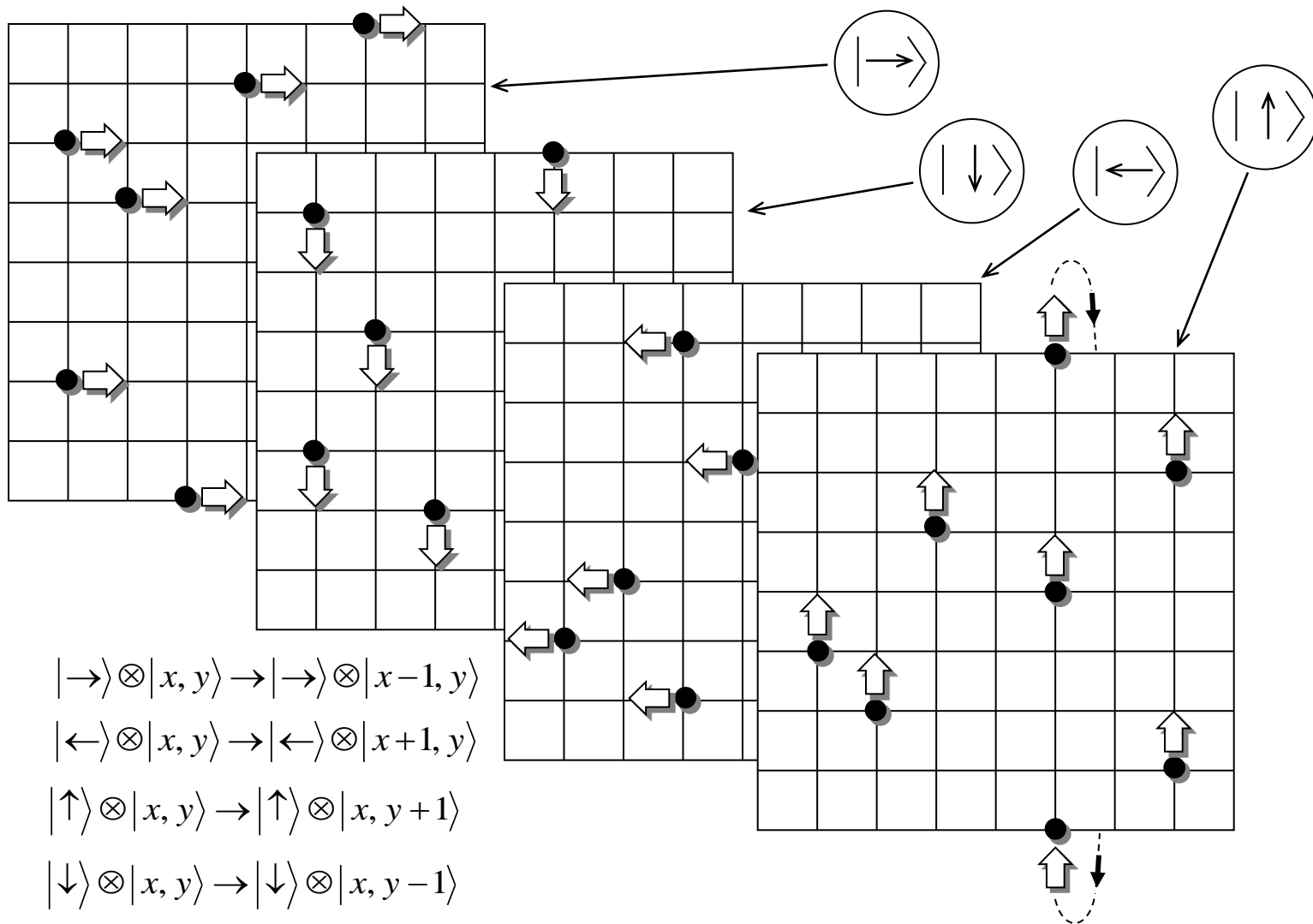


Kvantu klejošana 2D: “monētas mešanas” transformācija



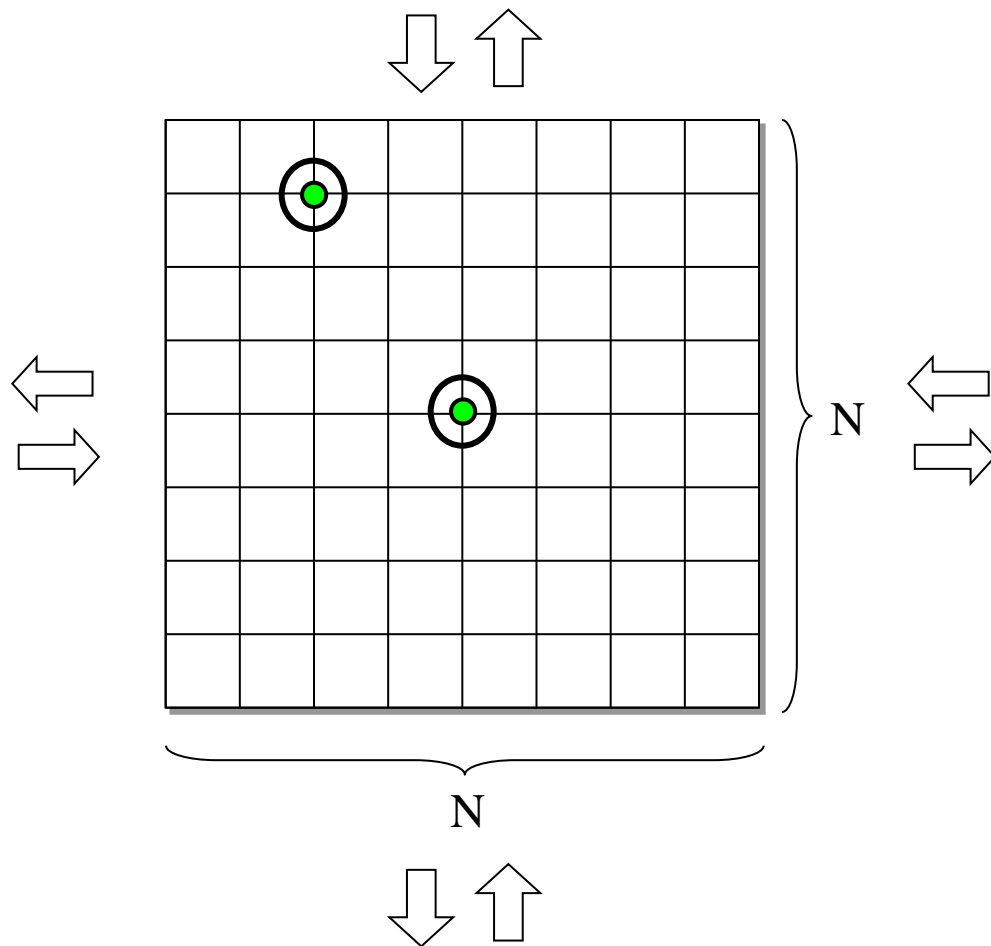
“monētas mešanas” transformācija

Kvantu klejošana 2D: nobīdes transformācija



Nobīdes transformācija

Kvantu meklēšana plaknē



Kvantu meklēšana plaknē

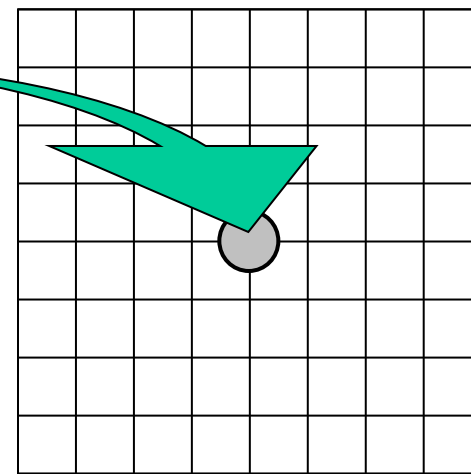
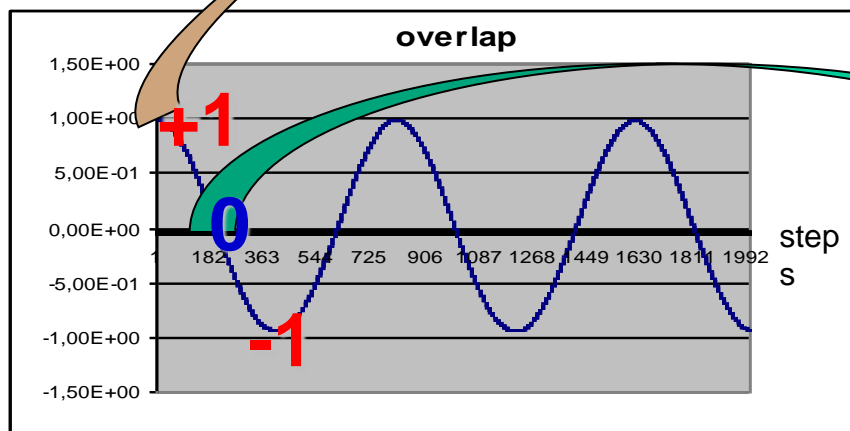
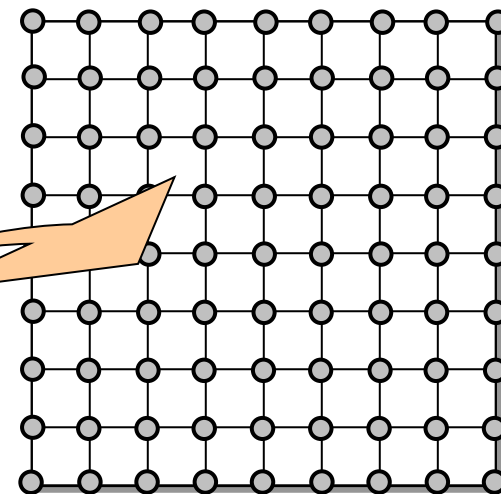
“Monētas” mešanas” transformācija	Pielietot <i>difūzijas</i> transformāciju neatzīmētām pozīcijām	Pielietot <i>identitātes</i> transformāciju atzīmētajām pozīcijām	Atkārtot $O(N)$ times
	$D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$-I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	
Nobīdes transformācija	Visās pozīcijās pielietot nobīdes transformāciju		
	$S_{ff}: \begin{aligned} \rightarrow\rangle \otimes x, y\rangle &\rightarrow \leftarrow\rangle \otimes x+1, y\rangle \\ \leftarrow\rangle \otimes x, y\rangle &\rightarrow \rightarrow\rangle \otimes x-1, y\rangle \\ \uparrow\rangle \otimes x, y\rangle &\rightarrow \downarrow\rangle \otimes x, y-1\rangle \\ \downarrow\rangle \otimes x, y\rangle &\rightarrow \uparrow\rangle \otimes x, y+1\rangle \end{aligned}$		

Skalārais reizinājums

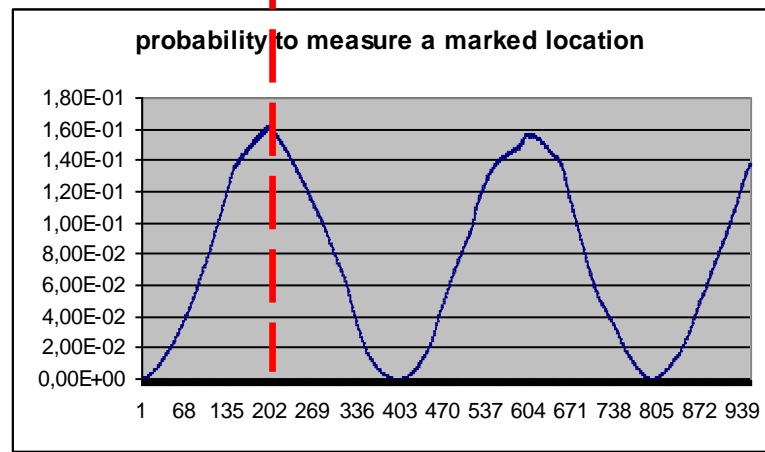
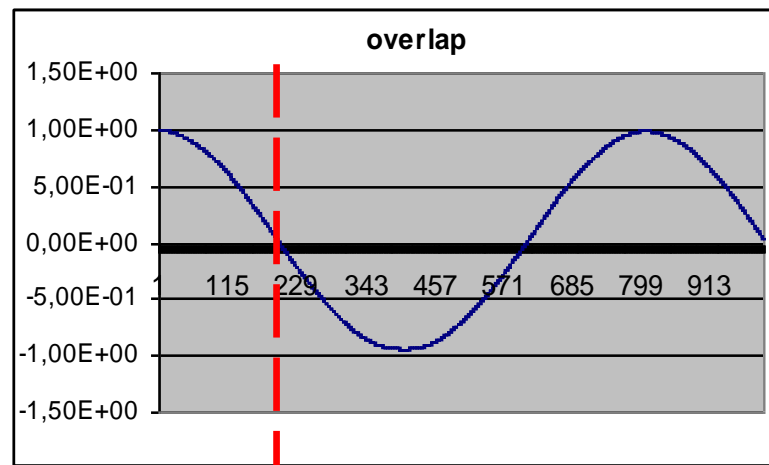
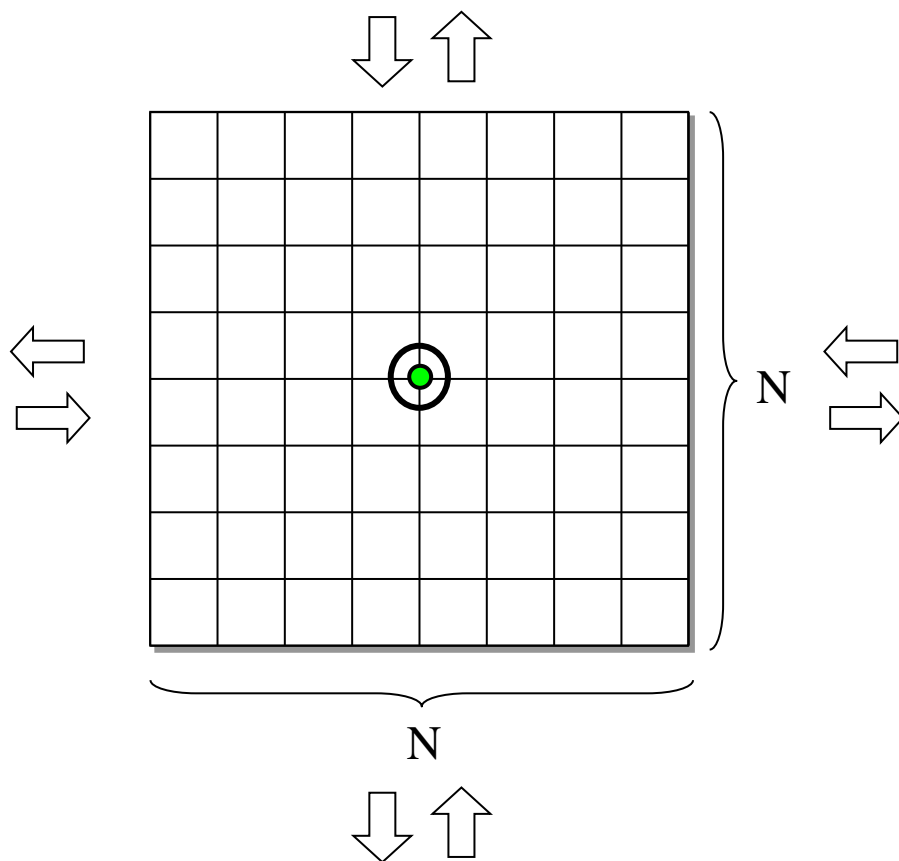
$(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – sākumstāvoklis

$(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n)$ – tekošais stāvoklis

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=0}^n \alpha_i \beta_i$$

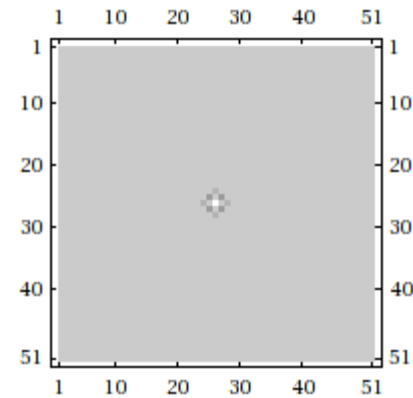
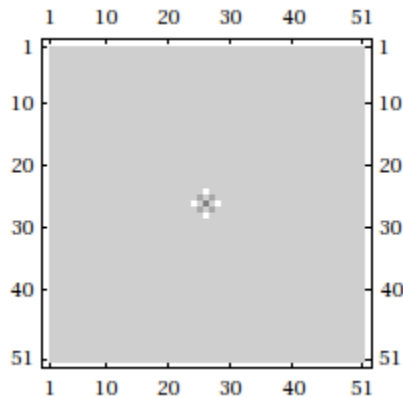


Kvantu klejošana uz plaknes: viens atrisinājums



Grid size: 101 x 101.
Number of steps: 1000.

Process ir jūtīgs pret transformāciju izvēli



Dažādas “Nobīdes” transformācijas

$$S_{move}: |\rightarrow\rangle \otimes |x, y\rangle \rightarrow |\rightarrow\rangle \otimes |x+1, y\rangle$$

$$|\leftarrow\rangle \otimes |x, y\rangle \rightarrow |\leftarrow\rangle \otimes |x-1, y\rangle$$



$$|\uparrow\rangle \otimes |x, y\rangle \rightarrow |\uparrow\rangle \otimes |x, y+1\rangle$$

$$|\downarrow\rangle \otimes |x, y\rangle \rightarrow |\downarrow\rangle \otimes |x, y-1\rangle$$

$$S_{flipflop}: |\rightarrow\rangle \otimes |x, y\rangle \rightarrow |\leftarrow\rangle \otimes |x+1, y\rangle$$

$$|\leftarrow\rangle \otimes |x, y\rangle \rightarrow |\rightarrow\rangle \otimes |x-1, y\rangle$$



$$|\uparrow\rangle \otimes |x, y\rangle \rightarrow |\downarrow\rangle \otimes |x, y-1\rangle$$

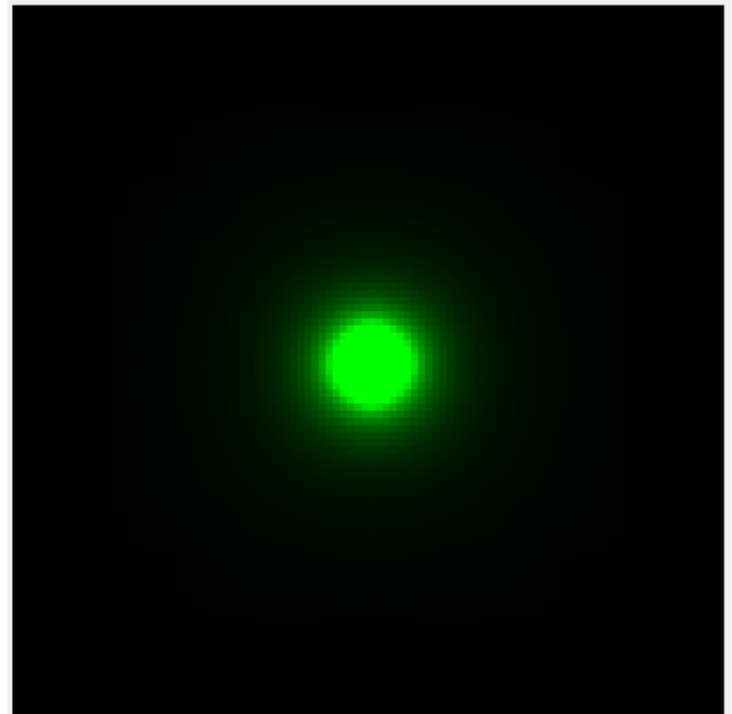
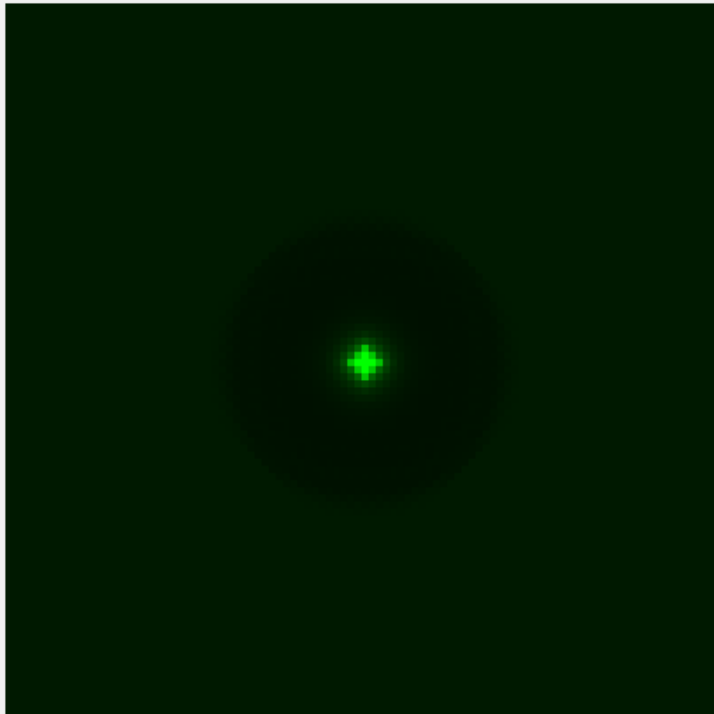
$$|\downarrow\rangle \otimes |x, y\rangle \rightarrow |\uparrow\rangle \otimes |x, y+1\rangle$$

Kādu uzlabojumu mēs piedāvājam?

- Oriģinālajam algoritmam kvantu meklēšanai plaknē bija nepieciešama amplitūdas amplifikācija, lai atrisinājumu atrast ar lielu varbūtību.
 - Mēs atklājām, ka ar lielu varbūtību tiks nomērīts stāvoklis, kas atrodas ne vairāk kā \sqrt{N} attālumā no atrisinājuma, tādēļ var iztikt bez amplitūdas amplifikācijas.
 - Mēs parādām to ar skaitliskiem eksperimentiem..
-

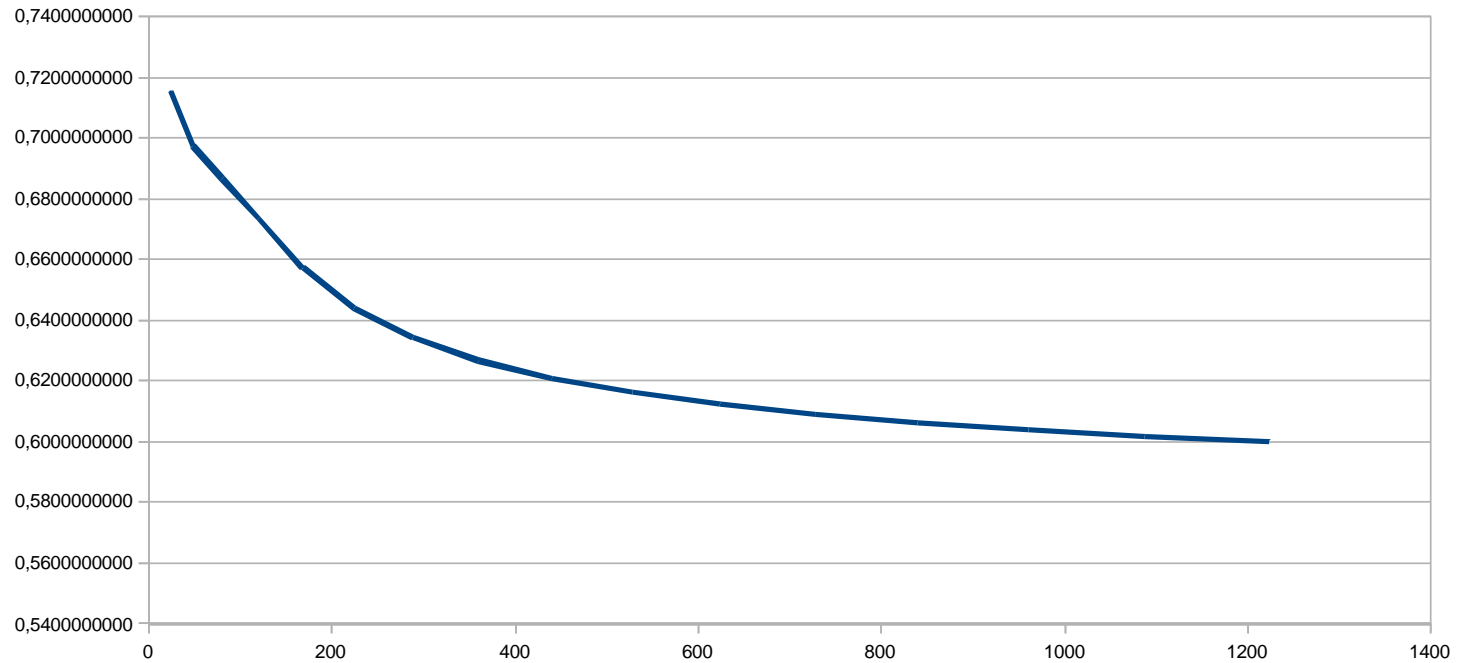
Kvantu klejošana kā meklēšanas algoritms

- Stāvoklis klejošanas sākumā un “beigās”



Atrisinājuma apkārtne

- Varbūtība nomērīt stāvoki \sqrt{N} attālumā no atrisinājuma

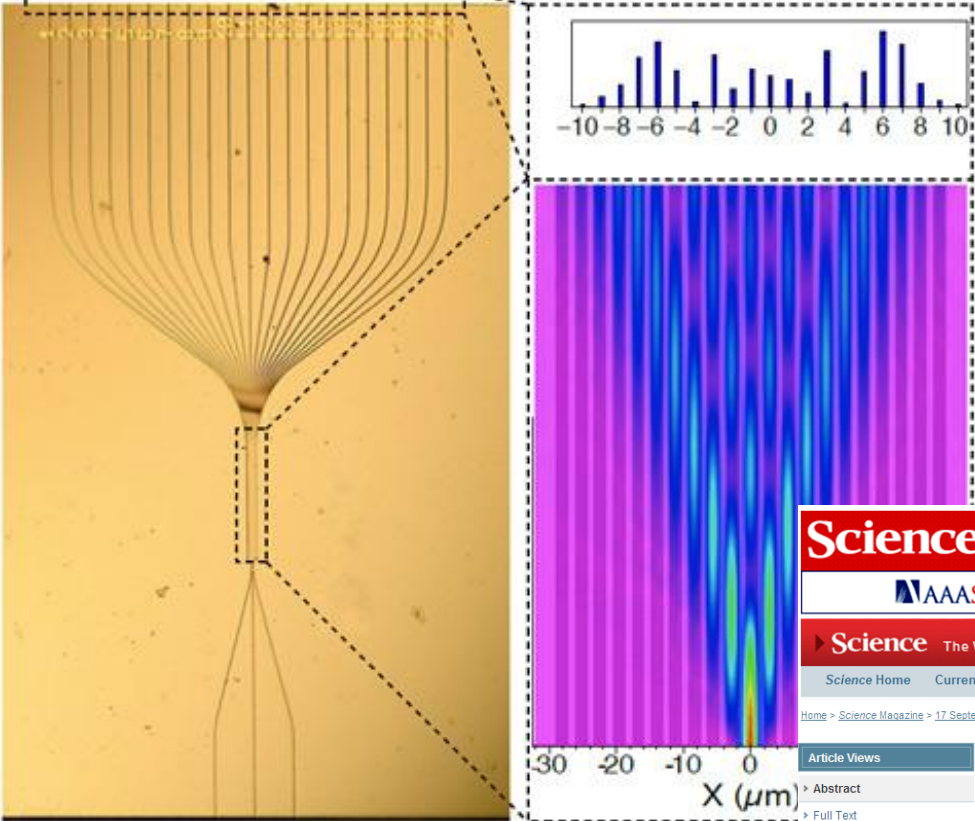


Kas notiks tālāk?

- LU DF students Artūrs Bačkurs mēģina to pašu pierādīt analītiski (ar panākumiem!)



Motivācija 1: ziņas no fiziķu kaujas lauka



The figure shows a micrograph of a photonic device on the left, with a dashed box highlighting a central region. This region is magnified in the center, showing a heatmap of light intensity. Above the heatmap is a bar chart with a horizontal axis labeled from -10 to 10 in increments of 2. Below the heatmap is a horizontal axis labeled 'X (μm)' with values from -30 to 0. The heatmap shows vertical interference fringes that become more complex and irregular as they approach the right side of the device.

Science AAAS.ORG | FEEDBACK | HELP | LIBRARIANS Science Magazine

NEWS SCIENCE JOURNALS CAREERS BLOGS & COMMUNITIES MULTIMEDIA

Science The World's Leading Journal of Original Scientific Research, Global News, and Commentary.

Science Home Current Issue Previous Issues Science Express Science Products My Science About the Journal

Home > Science Magazine > 17 September 2010 > Peruzzo et al., 329 (5998): 1500-1503

Science 17 September 2010:
Vol. 329 no. 5998 pp. 1500-1503
DOI: 10.1126/science.1193515

REPORT

Quantum Walks of Correlated Photons

Alberto Peruzzo¹, Mirko Lobino¹, Jonathan C. F. Matthews¹, Nobuyuki Matsuda², Alberto Politi¹, Konstantinos Poulkos¹, Xiao-Qi Zhou¹, Yoav Lahini³, Nur Ismail⁴, Kerstin Wörhoff⁴, Yaron Bromberg³, Yaron Silberberg³, Mark G. Thompson¹ and Jeremy L. O'Brien^{1*}

Article Views

- Abstract
- Full Text
- Full Text (PDF)
- Figures Only
- Supporting Online Material

Article Tools

- Save to My Folders
- Download Citation

*To whom correspondence should be addressed. E-mail: jeremy.obrien@bristol.ac.uk

Motivācija 2: kvantu klejošanai atradās pielietojumi!

- $O(N^{2/3})$ quantum algorithm for element distinctness problem

Ambainis, A.: Quantum walk algorithm for element distinctness.
SIAM J. Comput. 37(1), 210–239 (2007)

- An $O(N^{1.3})$ quantum algorithm for the triangle problem

Magniez, F., Santha, M., Szegedy, M.: An $O(n^{1.3})$ quantum algorithm for the triangle problem. In: Proceedings of SODA 2005, pp. 1109–1117 (2005), SIAM J. Comput. 37(2), 413–424 (2007)

- Matrix multiplication test – $O(N^{5/3})$

Buhrman, H., Špalek, R.: Quantum Verification of Matrix Products. In: SODA 2006. Proceedings of 17th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, Miami, Florida, pp. 880–889 (2006)

- NAND formula evaluation

A. Ambainis, A. Childs, B. Reichardt, R. Špalek, S. Zhang, "Any AND-OR Formula of Size N can be Evaluated in time $n^{1/2+o(1)}$ on a Quantum Computer", Proceedings of FOCS'2007, pp. 363-372 (2007).

Paldies par uzmanību!



Eiropas Sociālā fonda projekts

“Datorzinātnes pielietojumi un tās saiknes ar kvantu fiziku”

Nr.2009/0216/1DP/1.1.1.2.0/09/APIA/VIAA/044