IEGULDĪJUMS TAVĀ NĀKOTNĒ

Projekts Nr. 2009/0216/1DP/1.1.1.2.0/09/APIA/VIAA/044

NESTRIKTAS KOPAS AR VĒRTĪBĀM PUSGREDZENĀ UN MONĀDES PĀR KATEGORIJU

Jānis Cīrulis

Latvijas Universitāte

email: jc@lanet.lv

LMB 8. konference

Valmiera, 2010. g. 8.–10. aprīlis

1. MONĀDE KĀ VISPĀRINĀTU KOPU TEORIJAS FRAGMENTS

- Kopas un funkcijas (apzīmējumi)

X, Y, Z	- kopas,
$\alpha, \beta, \phi.\psi$	- funkcijas,
$\mathcal{S}et$	- visu kopu klase,
$\mathcal{F}un$	- visu funkciju klase.

- Monādes

- Monādes

Monāde ir trijnieks $(T, \eta, {}^\sharp)$, kur

- T ir attēlojums $\mathcal{S}et \to \mathcal{S}et$,
- η ir indeksētu funkciju saime $(\eta_X \colon X \to TX)_{X \in \mathcal{S}et}$,
- ${}^\sharp$ ir daļējs attēlojums $\mathcal{F}un \to \mathcal{F}un$, kas katram $X \in \mathcal{S}et$ pārveido funkcijas $X \to TY$ par funkcijām $TX \to TY$,

- Monādes

Monāde ir trijnieks $(T, \eta, {}^\sharp)$, kur

- T ir attēlojums $\mathcal{S}et \to \mathcal{S}et$,
- η ir indeksētu funkciju saime $(\eta_X \colon X \to TX)_{X \in \mathcal{S}et}$,
- $^\sharp$ ir daļējs attēlojums $\mathcal{F}un \to \mathcal{F}un$, kas katram $X \in \mathcal{S}et$ pārveido funkcijas $X \to TY$ par funkcijām $TX \to TY$,

un ir izpildītas aksiomas

(m1) $\alpha^\sharp \eta_X = \alpha$, $\quad \alpha \colon X \to TY$

(m2) $\eta_X{}^\sharp = id_{TX}$,

(m3) $(\beta^\sharp \alpha)^\sharp = \beta^\sharp \alpha^\sharp$ $\quad \alpha \colon X \to TY,\ \beta \colon Y \to TZ$.

Monāde ir trijnieks $(T, \eta, {}^\sharp)$, kur

- T ir attēlojums $\mathcal{S}et \to \mathcal{S}et$,
- η ir indeksētu funkciju saime $(\eta_X \colon X \to TX)_{X \in \mathcal{S}et}$,
- $\sharp$ ir daļējs attēlojums $\mathcal{F}un \to \mathcal{F}un$, kas katram $X \in \mathcal{S}et$ pārveido funkcijas $X \to TY$ par funkcijām $TX \to TY$.

• Inerpretācija: domāsim

- TX elementus kā kopas X *apakškopas*,
- (katram $x \in X$) kopu $\eta_X(x)$ kā X apakškopu $\{x\}$,
- funkciju $\alpha \colon X \to TY$ kā Y apakškopu *saimi* $(\alpha_x \in TY \colon x \in X)$,
- piemēram, η_X ir kopas X vienelementa apakškopu saime,
- (katram $p \in TX$) kopu $\alpha^\sharp(p) \in TY$ kā indeksu kopai p atbilstošo saimes $\alpha \colon X \to TY$ locekļu *apvienojumu* $\bigcup(\alpha_x \colon x \in p)$,
- pašu attēlojumu $\sharp$ kā *izsvērtu apvienošanu*.

Tātad $\eta_X(x) = \{x\}$, ja $p \in TX$, tad $\alpha^\sharp(p) = \bigcup(\alpha_x\colon x \in p)$

Tad izpildās visas trīs aksiomas:

Tātad $\eta_X(x) = \{x\}$, ja $p \in TX$, tad $\alpha^\sharp(p) = \bigcup(\alpha_x\colon x \in p)$

Tad izpildās visas trīs aksiomas:

(m1) $\alpha^\sharp \eta_X = \alpha$ $\alpha\colon X \to TY$

$$\alpha^\sharp(\eta_X(x')) = \bigcup(\alpha_x\colon x \in \{x'\}) = \alpha_{x'} = \alpha(x').$$

Tātad $\eta_X(x) = \{x\}$, ja $p \in TX$, tad $\alpha^\sharp(p) = \bigcup(\alpha_x \colon x \in p)$

Tad izpildās visas trīs aksiomas:

(m1) $\alpha^\sharp \eta_X = \alpha$ $\alpha \colon X \to TY$

$\alpha^\sharp(\eta_X(x')) = \bigcup(\alpha_x \colon x \in \{x'\}) = \alpha_{x'} = \alpha(x')$.

(m2) ${\eta_X}^\sharp = id_{TX}$ $\eta_X \colon X \to TX$

${\eta_X}^\sharp(p) = \bigcup(\{x\} \colon x \in p) = p$

Tātad $\eta_X(x) = \{x\}$, ja $p \in TX$, tad $\alpha^\sharp(p) = \bigcup(\alpha_x\colon x \in p)$

Tad izpildās visas trīs aksiomas:

(m1) $\alpha^\sharp \eta_X = \alpha$ $\alpha\colon X \to TY$

$\alpha^\sharp(\eta_X(x')) = \bigcup(\alpha_x\colon x \in \{x'\}) = \alpha_{x'} = \alpha(x')$.

(m2) ${\eta_X}^\sharp = id_{TX}$ $\eta_X\colon X \to TX$

${\eta_X}^\sharp(p) = \bigcup(\{x\}\colon x \in p) = p$

(m3) $(\beta^\sharp \alpha)^\sharp = \beta^\sharp\alpha^\sharp$ $\alpha\colon X \to TY$, $\beta\colon Y \to TZ$, $\beta^\sharp\alpha\colon X \to TZ$

- $(\beta^\sharp \alpha)(x) = \beta^\sharp(\alpha_x) = \bigcup(\beta_y\colon y \in \alpha_x)$
- $(\beta^\sharp \alpha)^\sharp(p) = \bigcup((\beta^\sharp \alpha)_x\colon x \in p) = \bigcup(\bigcup(\beta_y\colon y \in \alpha_x)\colon x \in p)$
- $(\beta^\sharp \alpha^\sharp)(p) = \beta^\sharp(\alpha^\sharp(p)) = \beta^\sharp(\bigcup(\alpha_x\colon x \in p)) = \bigcup(\beta_y\colon y \in \bigcup(\alpha_x\colon x \in p))$.

Monāde ir trijnieks $(T, \eta, ^\sharp)$, kur

- T ir attēlojums $\mathcal{S}et \to \mathcal{S}et$,
- η ir indeksētu funkciju saime $(\eta_X\colon X \to TX)_{X \in \mathcal{S}et}$,
- $^\sharp$ ir daļējs attēlojums $\mathcal{F}un \to \mathcal{F}un$, kas katram $X \in \mathcal{S}et$ pārveido funkcijas

$X \to TY$ par funkcijām $TX \to TY$.

- Vispārīgs piemērs (ieskicēts):

Ω	- fiksēta kopa,
$0, 1$	- elementi no Ω $(0 \neq 1)$,
$T(X)$	- netukša Ω^X apakškopa,
η_X	- attēlojums, kas katram $x \in X$ piesaista delta funkciju kopā X, kas koncentrēta punktā x:

$$\eta_X(x)(x') = \begin{cases} 1, \text{ ja } x' = x, \\ 0, \text{ ja } x' \neq x. \end{cases}$$

Monāde ir trijnieks $(T, \eta, ^\sharp)$, kur

- T ir attēlojums $\mathcal{S}et \to \mathcal{S}et$,
- η ir indeksētu funkciju saime $(\eta_X\colon X \to TX)_{X \in \mathcal{S}et}$,
- $^\sharp$ ir daļējs attēlojums $\mathcal{F}un \to \mathcal{F}un$, kas katram $X \in \mathcal{S}et$ pārveido funkcijas $X \to TY$ par funkcijām $TX \to TY$.

Ņem $\alpha\colon X \to T(Y)$, $p \in T(X)$, $y \in Y$ un rēķina $\alpha^\sharp(p)(y)$:

- izraugās patvaļīgu $x \in X$ un ņem $\alpha_x \in TY$,
  "sareizina" $\alpha_x(y)$ ar "svaru" $p(x)$: $p(x)\alpha_x(y)$,
- "summē pa x" visus tādus reizinājumus:
  $$\sum(p(x)\alpha_x(y)\colon x \in X).$$
- iegūto "vidējojumu" ņem par $\alpha^\sharp(p)(y)$.

Aksiomas:

(m1) $\alpha^\sharp \eta_X = \alpha,$ $\alpha\colon X \to TY$

$\alpha^\sharp(\eta_X(x))(y) = \alpha_x(y) = \alpha(x)(y).$

(m2) $\eta_X{}^\sharp = id_{TX}$ $\eta_X\colon X \to TX$

$\eta_X{}^\sharp(p)y) = p(y)$

(m3) $(\beta^\sharp \alpha)^\sharp = \beta^\sharp\alpha^\sharp$ $\alpha\colon X \to TY,\ \beta\colon Y \to TZ,\ \beta^\sharp\alpha\colon X \to TZ$

$(\beta^\sharp \alpha)^\sharp(p)(z) = (\beta^\sharp \alpha^\sharp)(p)(z).$

Aksiomas:

(m1) $\alpha^\sharp \eta_X = \alpha,$ $\qquad \alpha\colon X \to TY$

$\alpha^\sharp(\eta_X(x))(y) = \alpha_x(y) = \alpha(x)(y).$

(m2) $\eta_X{}^\sharp = id_{TX}$ $\qquad \eta_X\colon X \to TX$

$\eta_X{}^\sharp(p)y) = p(y)$

(m3) $(\beta^\sharp\,\alpha)^\sharp = \beta^\sharp\alpha^\sharp$ $\qquad \alpha\colon X \to TY,\ \beta\colon Y \to TZ,\ \beta^\sharp\alpha\colon X \to TZ$

$(\beta^\sharp\,\alpha)^\sharp(p)(z) = (\beta^\sharp\,\alpha^\sharp)(p)(z).$

• Kādām jābūt $\sum$ (galīgā gadījumā $+$), $\cdot$, 0, 1 īpašībām, lai visas trīs aksiomas varētu pierādīt?

2. PUSGREDZENISKA LOĢIKA

2. PUSGREDZENISKA LOĢIKA

Kādēļ pusgredzeni?

2. PUSGREDZENISKA LOĢIKA

Kādēļ pusgredzeni?

• (a) Klasiskā loğika un kopu teorija:

▪ predikāts kopā X (X apakškopa) ir funkcija $X \to \{a, p\}$,

▪ patiesumvērtību kopa $\{a, p\}$ ir pusgredzens attiecībā uz disjunkciju un konjunkciju ar nulles elementu a un vieninieku p.

• (a') Raupjās kopas:

▪ raupja X apakškopa ir daļēja funkcija $X \to \{a, p\}$.

• (b) Zade:

▪ predikāts (apakškopa) ir funkcija $X \to [0, 1]$,

▪ vienības segments ([0,1], max, min, 0, 1) ir pusgredzens.

• (c) Vispārīgāk – ar režği L:

▪ predikāts (apakškopa) ir funkcija $X \to L$,

▪ ikviens režğis $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ ir pusgredzens.

- (d) Vēl vispārīgāk – ar quantāli Q:

▪ predikāts (apakškopa) ir funkcija $X \to Q$,

▪ unitāla stingri divpusēja kvantāle ir pusgredzens $(Q, \vee, \odot, 0, 1)$ ir (nekomutatīvs) pusgredzens.

Līdzīgi BL-algebras, MV-algebras u.tml.

- (e) Varbūtību loģika:

▪ predikāts (varbūtību blīvums) ir normēta funkcija $X \to [0, 1]$,

▪ segments $([0, 1], +, \cdot, 0, 1)$ ir daļējs pusgredzens.

- (f) Multikopas:

▪ multikopa ir funkcija $X \to N$,

▪ naturālo skaitļu kopa ir pusgredzens $(N, +, \cdot, 0, 1)$ (bez vislielākā elementa).

Aditīvi daļēji pusgredzeni

Aditīvi daļēji pusgredzeni

• *Daļējs komutatīvs monoids* ir algebra $(A, +, 0)$, kur $+$ ir daļēja operācija kopā A, $0 \in A$ un izpildās aksiomas

▪ $x + y = y + x$,

▪ $x + (y + z) = (x + y) + z$,

▪ $x + 0 = x$

(katra vienādība ir lasāma:
"ja viena puse ir definēta, tad ir arī otra un abas ir vienādas").

!! Arī visur definēta saskaitīšana netiek izslēgta.

• Daļējs monoids ir *sakārtots*, ja tajā fiksēta sakārtojuma attiecība tā, lai

▪ no $x \leq y$ izriet, ka $x + z \leq y + z$.

Sakārtotu monoidu sauc par

▪ *pozitīvu*, ja 0 ir tā mazākais elements,

▪ *ierobežotu*, ja tas ir pozitīvs un tajā ir lielākais elements.

• *Pēc summām sakārtots* daļējs monoids ir tāds, kas apmierina nosacījumu

▪ ja $x + y + z = x$, tad $x + y = x$.

Tas tā ir tad un tikai tad, ja attiecība $\leq$, ko definē ar

▪ $x \leq y$ tad un tikai tad, ja $\exists z\, x + z = y$

ir sakārtojums.

Ja tā notiek, tad monoids ir sakārtots un pozitīvs.

Bez tam,

ja $x + y$ eksistē, $x' \leq x$, $y' \leq y$, tad $x' + y'$ eksistē.

- *(Aditīvi) daļējs pusgredzens* ir algebra $(S, +, \cdot, 0)$, kur

▪ $(S, +, 0)$ ir daļējs komutatīvs monoids,

▪ $(S, \cdot, 0)$ ir pusgrupa ar nulles elementu,

▪ reizināšana $\cdot$ ir abpusēji distributīva: ja attiecīgās summas ir definētas, tad

$$(x + y)z = xz + yz, \quad z(x + y) = zx + zy.$$

Unitāls daļējs pusgredzens ir tāds, kurā reizināšanai ir abpusējs neitrālais elements 1.

• Daļējs pusgredzens ir *sakārtots*, ja tajā fiksēta sakārtojuma attiecība tā, ka

▪ no $x \leq y$ izriet, ka $x + z \leq y + z$, $xz \leq yz$ un $zx \leq zy$.

Par *integrālu* sauc tādu unitālu ierobežotu daļēju pusgredzenu, kurā reizināšanas neitrālais elements ir vislielākais.

Vispārinātā summēšana pusgredzenos

Vispārinātā summēšana pusgredzenos

Par *summēšanu pa kopu X* pusgredzenā S sauc daļēju funkcionāli $\sum_X$, kas patvaļīgām (ne obligāti visām) funkcijām $X \to S$

jeb S elementu saimēm ar indeksu kopu X

piekārto S elementus tā,

Vispārinātā summēšana pusgredzenos

Par *summēšanu pa kopu X* pusgredzenā S sauc daļēju funkcionāli $\sum_X$, kas patvaļīgām (ne obligāti visām) funkcijām $X \to S$

jeb S elementu saimēm ar indeksu kopu X

piekārto S elementus tā, ka

- $\sum_X(\phi + \psi) = \sum \phi + \sum \psi$,
- $\sum_X(s\phi) = s \sum_X \phi$ katram $s \in S$,
- $\sum_X \phi = 0$, ja visi ϕ locekļi ir 0,
- $\sum_X \phi = s$, kāds ϕ loceklis ir s, bet visi pārējie ir 0.

Tātad funkcionālis $\sum_X$ ir lineārs.

$\sum_X \phi$ vietā var rakstīt arī $\sum(\phi(x)\colon x \in X)$.

!! Ja saimē ϕ ir galīgs skaits no 0 atšķirīgu locekļu, tad $\sum_X \phi$ iznāk vienāds ar to summu.

Summēšanas funkcionāļiem pa dažādām kopām jābūt saskaņotiem:

Pieņemsim, ka

- X ir savstarpēji šķirtu kopu X_i $(i \in I)$ apvienojums,
- ϕ ir patvaļīga funkcija $X \to S$,

katram $i \in I$ $\psi_i := \phi|X_i$, χ ir funkcija $I \to S$, ko definē ar

$\zeta(i) = \sum_{X_i} \psi_i$.

Tad ir spēkā vispārināts asociatīvais likums

$\sum_I \zeta = \sum_X \phi$.

Summēšanas funkcionāļiem pa dažādām kopām jābūt saskaņotiem:

Pieņemsim, ka

- X ir savstarpēji šķirtu kopu X_i $(i \in I)$ apvienojums,
- ϕ ir patvaļīga funkcija $X \to S$,

katram $i \in I$ $\psi_i := \phi|X_i$, χ ir funkcija $I \to S$, ko definē ar

$$\zeta(i) = \sum_{X_i} \psi_i.$$

Tad ir spēkā vispārināts asociatīvais likums

$$\sum_I \zeta = \sum_X \phi.$$

Izvērstā formā:

$$\sum(\,(\sum(\psi_i(x_i)\colon x_i \in X_i)\colon\ i \in I) = \sum(\phi(x)\colon x \in X).$$

• S ir *pusgredzens ar summēšanu*, ja tajā katrai kopai X ir fiksēta kāda summēšana $\sum_X$ tā, ka vispārinātais asociatīvais likums ir spēkā.

• S ir *pusgredzens ar summēšanu*, ja tajā katrai kopai X ir fiksēta kāda summēšana $\sum_X$ tā, ka vispārinātais asociatīvais likums ir spēkā.

Visos sākumā apskatītajos piemēros, izņemot multikopas, pieminētie pusgredzeni ir pēc summām sakārtoti integrāli daļēji pusgredzeni ar summēšanu .

Turpmāk ar pusgredzenu sapratīsim tieši tādu daļēju pusgredzenu.

Pusgredzeniska loģika (Semiring-like logic)

Precizēta monādes konstrukcija

Precizēta monādes konstrukcija

Fiksēsim vienu pusgredzenu $\Omega := (\Omega, +, \cdot, 0, 1)$ ar summēšanu $\sum$ un domāsim to kā patiesumvērtību kopu.

Apzīmēsim ar $F(X)$ visu funkciju $X \to \Omega$ kopu.
Katru funkciju $\phi \in F(X)$ var uzskatīt par Ω elementu saimi $(\phi(x)\colon x \in X)$.

Precizēta monādes konstrukcija

Fiksēsim vienu pusgredzenu $\Omega := (\Omega, +, \cdot, 0, 1)$ ar summēšanu $\sum$ un domāsim to kā patiesumvērtību kopu.

Apzīmēsim ar $F(X)$ visu funkciju $X \to \Omega$ kopu.
Katru funkciju $\phi \in F(X)$ var uzskatīt par Ω elementu saimi $(\phi(x)\colon x \in X)$.

Funkciju $\phi \in F(X)$ saucam par
- *summējamu*, ja $\sum_X \phi$ ir definēts,
- *normētu*, ja ϕ ir summējama un $\sum_X \phi = 1$,
- *supersummējamu*, ja reizinājums $(\phi \cdot \psi)$ ir summējams visām funkcijām $\psi \in F(X)$.

Apzīmējam ar

$S(X)$ – visu summējamo funkciju kopu no $F(X)$,

$N(X)$ – visu normēto funkciju kopu no $F(X)$,

$SS(X)$ – visu supersummējamo funkciju kopu no $F(X)$.

Tad

$N(X) \subseteq SS(X) \subseteq S(X)$.

Apzīmējam ar

$S(X)$ – visu summējamo funkciju kopu no $F(X)$,
$N(X)$ – visu normēto funkciju kopu no $F(X)$,
$SS(X)$ – visu supersummējamo funkciju kopu no $F(X)$.

Tad

$N(X) \subseteq SS(X) \subseteq S(X)$.

Jebkuru supersummējamu funkciju var uzskatīt par Ω-vērtīgu predikātu kopā X (X apakškopu).

Par $T(X)$ var ņemt kādu $SS(X)$ apakškopu, tomēr jāievēro noteikti (un zināmi) saskaņotības nosacījumi dažādiem X.
Tie izpildās, kad $T(X) = SS(X)$ vai $T(X) = N(X)$.

Apzīmējam ar

$S(X)$ – visu summējamo funkciju kopu no $F(X)$,

$N(X)$ – visu normēto funkciju kopu no $F(X)$,

$SS(X)$ – visu supersummējamo funkciju kopu no $F(X)$.

Tad

$N(X) \subseteq SS(X) \subseteq S(X)$.

Jebkuru supersummējamu funkciju var uzskatīt par Ω-vērtīgu predikātu kopā X (X apakškopu).

Par $T(X)$ var ņemt kādu $SS(X)$ apakškopu, tomēr jāievēro noteikti (un zināmi) saskaņotības nosacījumi dažādiem X.
Tie izpildās, kad $T(X) = SS(X)$ vai $T(X) = N(X)$.

Teorēma. Piemērā aprakstītais konstrukts $(T, \eta, ^\sharp)$ (ar pēc tam izdarītajiem precizējumiem) ir monāde.
Otrādi, ja modāde ir piemērā aprakstītajā veidā izveidota no kādiem $Q, +, \cdot, 0, 1, \sum$, tad $(Q, +, \cdot, 0, 1)$ ir pusgredzens ar summēšanu $\sum$.