EIROPAS SOCIĀLAIS FONDS *** EIROPAS SAVIENĪBA

IEGULDĪJUMS TAVĀ NĀKOTNĒ

Projekts Nr. 2009/0216/1DP/1.1.1.2.0/09/APIA/VIAA/044

PAPILDINĀJUMI S.GUDERA TEORĒMAI PAR KVANTU NOVĒROJAMO SAKĀRTOJUMU

Jānis Cīrulis

Latvijas Universitāte

epasts: `jc@lanet.lv`

9. Latvijas matemātikas konference

Jelgava, 2012. gada 30.–31. marts

PĀRSKATS

1. Hilberta telpas
2. "Loǧiskais sakārtojums" operatoru kopā
3. Jaunumi

[G] GUDDER, S:
An order for quantum observables, Math. Slovaca **56** (2006), 573–589.

[P&V] PULMANNOVÁ, S., VINCEKOVÁ, E.:
Remarks on the order for quantum observables, Math. Slovaca **57** (2007), 589–600.

1. HILBERTA TELPAS

Apzimējumi un definīcijas

H	kompleksa vai reāla Hilberta telpa
$\mathcal{S}(H)$	visu tās slēgto apakštelpu kopa
$\perp$	apakštelpu ortogonalitātes attiecība
$\mathcal{O}(H)$	visu telpas H ierobežoto Ermita operatoru kopa
$\mathcal{P}(H)$	visu projektoru kopa šajā telpā
$\operatorname{ran} A$	operatora A vērtību apgabals
$\overline{\operatorname{ran}} A$	tā (topoloģiskais) slēgums telpā H
P_A	projektors uz apakštelpu $\overline{\operatorname{ran}} A$
E_A	operatoram A atbilstošais spektrālais mērs kopā $\mathbb{R}$.

- Hilberta telpa ir lineāra vektoru telpa ar skalāru reizinājumu.
- Apakštelpas X un Y ir ortogonālas, ja visi vienas vektori ir ortogonāli visiem otras vektoriem.
- A ir Ermita operators, ja $A^* = A$, kur $(Ax, y) = (x, A^*y)$.
- Projektors (jeb ortogonālās projekcijas operators) ir idempotents Ermita operators, tā vērtību apgabals ir slēgta apakštelpa.

Daži noderīgi fakti

Projektoru kopa $\mathcal{P}(H)$ ir sakārtota:

$P_1 \leq P_2 :\equiv P_1 P_2 = P_1 = P_2 P_1$

un ir ortomodulārs režģis $(\mathcal{P}(H), \wedge, \vee, ^{\perp}, O, I)$ kurš izomorfs $\mathcal{S}(H)$:

$\overline{\mathrm{ran}}(P_1 \wedge P_2) = \overline{\mathrm{ran}}\, P_1 \cap \overline{\mathrm{ran}}\, P_2$,

$\overline{\mathrm{ran}}(P_1 \vee P_2) = \overline{\mathrm{ran}}\, P_1 \sqcup \overline{\mathrm{ran}}\, P_2$,

$\overline{\mathrm{ran}}\, P^{\perp} = (\mathrm{ran}\, P)^{\perp}$

un ir pat pilns.

$\overline{\mathrm{ran}}\, P_1 \subseteq \overline{\mathrm{ran}}\, P_2$ ttt $P_1 \leq P_2$,

$\overline{\mathrm{ran}}\, P_1 \perp \overline{\mathrm{ran}}\, P_2$ ttt $P_1 P_2 = O$,

$\overline{\mathrm{ran}}\, P_A = \overline{\mathrm{ran}}\, A$.

2. "Loģiskais sakārtojums" kopā $\mathcal{O}(H)$

Ortogonāli operatori

Operatorus $A, B \in \mathcal{O}(H)$ sauksim par *ortogonāliem*, ja $AB = O$ (un tātad arī $BA = O$), kur O ir nulles operators.
Pieraksts simbolos: $A \perp B$.

Tad $A \perp B$ ttt $P_A \perp P_B$ ttt $\overline{\text{ran}}\, A \perp \overline{\text{ran}}\, B$.

Sakārtojums

Kopā $\mathcal{O}(H)$ definē bināru attiecību $\preceq$, nosakot, ka

$$A \preceq B :\equiv B = A + C \text{ kādam } C \in \mathcal{O}(H), \text{ kam } A \perp C.$$

Lemma [G]

Attiecība $\preceq$ ir sakārtojums kopā $\mathcal{O}(H)$,

Jebkuriem $A, B \in \mathcal{O}(H)$ sekojoši apgalvojumi ir ekvivalenti:

(a) $A \preceq B$,

(b) $Ax = Bx$ visiem $x \in \overline{\operatorname{ran}} A$,

(c) $A = BP_A$,

(d) $AB = A^2$,

(e) $E^A(\Delta) \leq E^B(\Delta)$ ikvienai Borela kopai Δ, kas nesatur 0.

Dažas sīkas sekas [G]:

- $O \preceq A$ katram A,
- $A \in \mathcal{P}(H)$ ttt $A \preceq I$, (I ir vienības operators)
- ja $A \preceq P$, tad $A \in \mathcal{P}(H)$,
- $P_1 \preceq P_2$ ttt $P_1 \leq P_2$,
- ja $A \preceq B$ un $B \geq O$, tad $A \leq B$,
- ja operators ir apgriežams, tad tas ir maksimāls,
- nav vislielākā operatora.

Teorēma [G]

- Ikviens sākumnogrieznis $[O, A]$ kā sakārtota kopa ir izomorfa operatora A noteiktam $\mathcal{P}(H)$ apakšrežģim L_A.
- Līdz ar to $[0, A]$ pats ir režģis.
- Tātad, ja diviem operatoriem ir kopēja augšēja robeža, tad tiem eksistē suprēms un infīms sakārtotajā kopā $\mathcal{O}(H)$.

Teorēma [P & V]

- Ikvienai no augšas ierobežotai operatoru kopai eksistē suprēms.
- Līdz ar to, ikvienai netukšai operatoru kopai eksistē infīms.
- Tad infīms eksistē jebkuriem diviem operatoriem.

Teorēma [G]

- Ikviens sākumnogrieznis $[O, A]$ kā sakārtota kopa ir izomorfa operatora A noteiktam $\mathcal{P}(H)$ apakšrežģim L_A.
- Līdz ar to $[0, A]$ pats ir režģis.
- Tātad, ja diviem operatoriem ir kopēja augšēja robeža, tad tiem eksistē suprēms un infīms.

Kāpēc L_A tiešām ir režģis, nav pateikts, un nav acīmredzams.

Otrais apgalvojums viss no pirmā neizriet.

Teorēma [P & V]

- Ikvienai no augšas ierobežotai operatoru kopai eksistē suprēms.
- Līdz ar to, ikvienai netukšai operatoru kopai eksistē infīms.
- Tad infīms eksistē jebkuriem diviem operatoriem.

Teorēma [G]

- Ikviens sākumnogrieznis $[O, A]$ kā sakārtota kopa ir izomorfa operatora A noteiktam $\mathcal{P}(H)$ apakšrežģim L_A.
- Līdz ar to $[0, A]$ pats ir režģis.
- Tātad, ja diviem operatoriem ir kopēja augšēja robeža, tad tiem eksistē suprēms un infīms.

Teorēma [P & V]

- Ikvienai no augšas ierobežotai operatoru kopai eksistē suprēms.
- Līdz ar to, ikvienai netukšai operatoru kopai eksistē infīms.
- Tad infīms eksistē jebkuriem diviem operatoriem.

Pirmais no trim apgalvojumiem pierādīts, izmantojot galīgo suprēmu eksistenci un Vigiera lemmu par projektoru virkņu konverģenci stingrajā H topoloģijā.

3. JAUNUMI

Teorēma [J.C.]

Jebkuriem $A, B, C \in \mathcal{O}(H)$, ja $A, B \preceq C$, tad
- $C(P_A \vee P_B)$ ir A un B suprēms,
- $C(P_A \wedge P_B)$ ir A un B infīms.

Pierādījuma shēma

Pieņemam, ka $A, B \preceq C$, t.i., $A = CP_A$ un $B = CP_B$

Tad $P_A, P_B \leq P_C$ un P_A, P_B komutē ar C.
T.i., $\boxed{P_A, P_B \in L_C}$, un tad arī $P_A \vee P_B$ un $P_A \wedge P_B$ komutē ar C.
Tāpēc $C(P_A \vee P_B)$ un $C(P_A \wedge P_B)$ ir Ermīta operatori.

(a)

- $A = CP_A = C(P_A \vee P_B)P_A$, t.i. $A \preceq C(P_A \vee P_B)$.

Līdzīgi $B \preceq C(P_A \vee P_B)$.

- Pieņemam, ka $A, B \preceq D$.

Tad D sakrīt ar A un tāpēc arī ar C apkštelpā $\overline{\text{ran}}\, A$.

Līdzīgi D sakrīt ar C apakštelpā $\overline{\text{ran}}\, B$.

Tāpēc C un D sakrīt arī to apvienojuma ğenerētajā slēgtajā apakštelpā: $C|(\overline{\text{ran}}\, A \sqcup \overline{\text{ran}}\, B) = D|(\overline{\text{ran}}\, A \sqcup \overline{\text{ran}}\, B)$

- No tā izriet, ka $C(P_A \vee P_B) = D(P_A \vee P_B)$.
- No $P_A \vee P_B \leq P_C$ var izsecināt, ka $P_A \vee P_B = P_{C(P_A \vee P_B)}$, bet tālāk – ka $C(P_A \vee P_B) \preceq D$.
- Tātad $C(P_A \vee P_B)$ ir A un B mazākais augšējais slieksnis.

(b)

- $C(P_A \wedge P_B) = CP_A(P_A \wedge P_B) = A(P_A \wedge P_B) = AP_{C(P_A \wedge P_B)}$ un

kopā $C(P_A \wedge P_B) \preceq A$.

Līdzīgi $C(P_A \wedge P_B) \preceq B$

- Pieņemam, ka $D \preceq A, B$.

Tad $D \preceq C$, $P_D \leq P_A \wedge P_B$ un $C(P_A \wedge P_B)P_D = CP_D = D$.

- No tā izriet, ka $D \preceq C(P_A \wedge P_B)$.

- Tātad $C(P_A \wedge P_B)$ ir A un B lielākais apakšējais slieksnis.

Līdzīgi (a) pierāda arī vispārīgāku teorēmu

Teorēma J.C.

Jebkurai $\mathcal{O}(H)$ apakškopai $\mathcal{M}$ un tās augšējam slieksnim C operators $C(\bigvee P_A \colon A \in \mathcal{M})$ ir $\mathcal{M}$ suprēms.

Sekas

Tātad ikvienai no augšas ierobežotai operatoru kopai eksistē suprēms un ikvienai netukšai operatoru kopai eksistē infīms.