

Latvijas Universitātes 70. konference
Datorzinātņu un informācijas tehnoloģiju apvienotā sekcija

Kvantu klejošana uz divdimensiju režģa

A.Ambainis, A.Bačkurs, N.Nahimovs, R.Ozols, A.Rivošs

2012.gada 10.februārī



IEGULDĪJUMS TAVĀ NĀKOTNĒ



Eiropas Sociālā fonda projekts

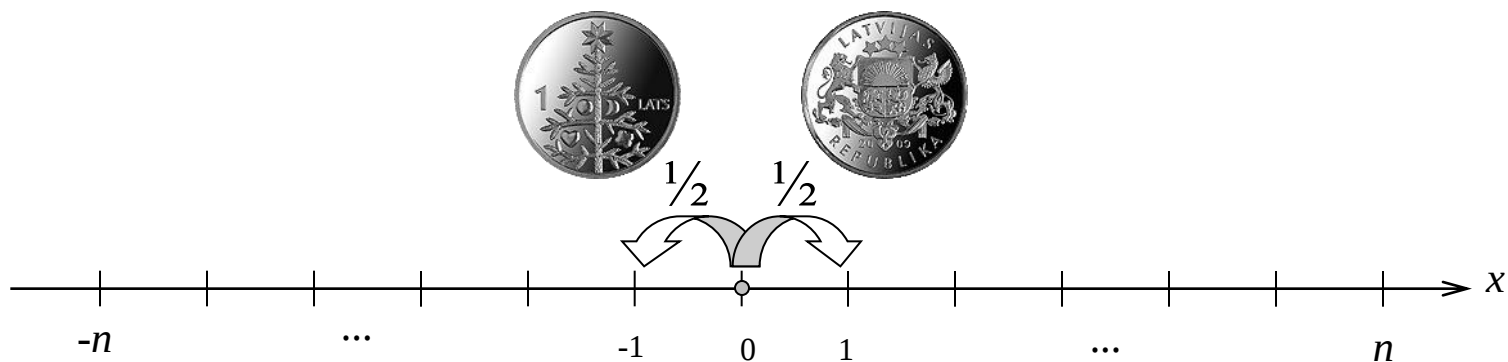
“Datorzinātnes pielietojumi un tās saiknes ar kvantu fiziku”

Nr.2009/0216/1DP/1.1.1.2.0/09/APIA/VIAA/044

Gadījumu klejošana (pavisam īss ieskats)

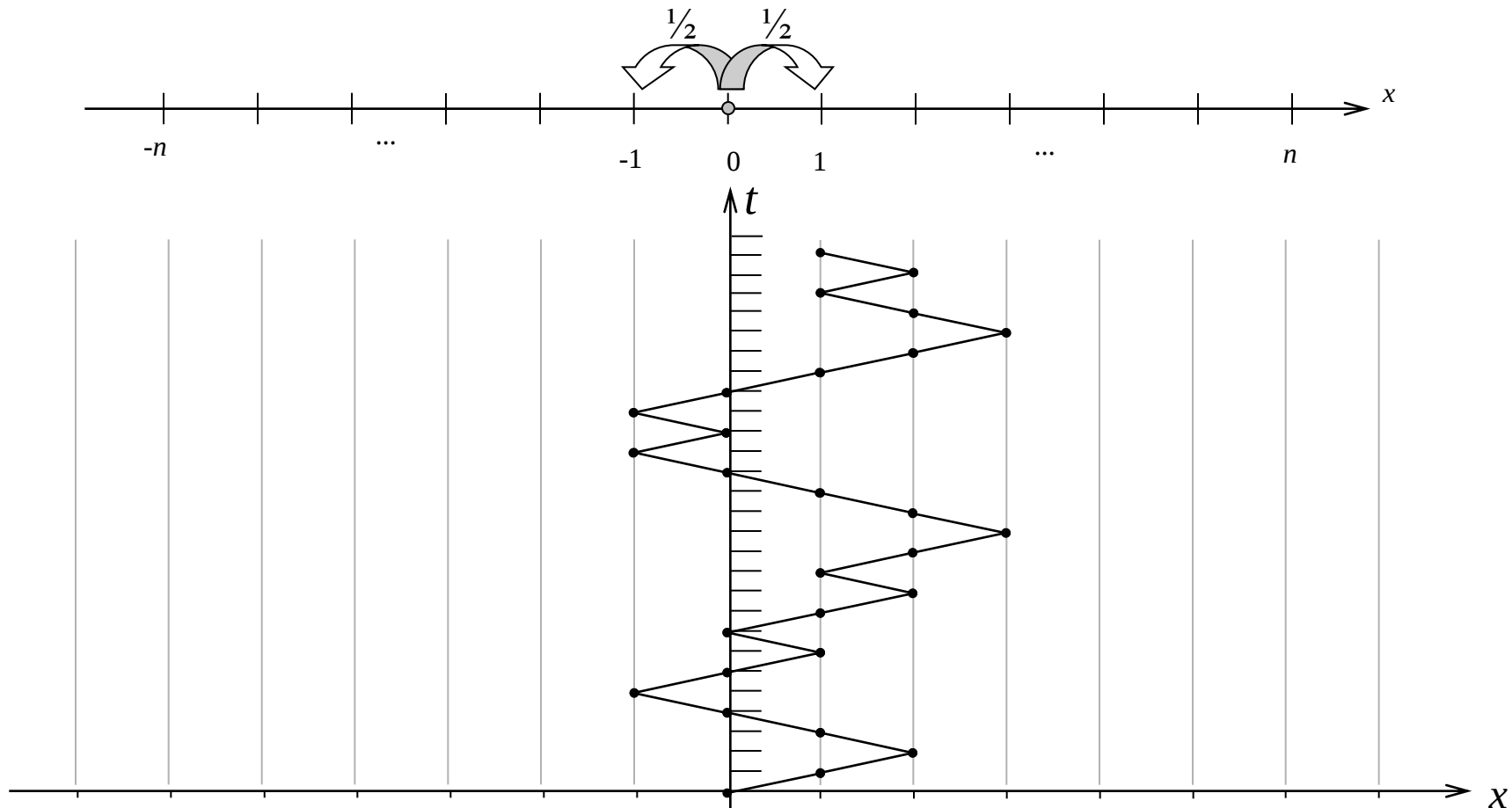
Gadījuma klejošana taisnē

- Klasiskā gadījumu klejošana taisnē
 - Sākam punktā $x=0$
 - Katrā solī:
 - ar varbūtību $1/2$ – pārvietojamies pa labi *)
 - ar varbūtību $1/2$ – pārvietosimies pa kreisi



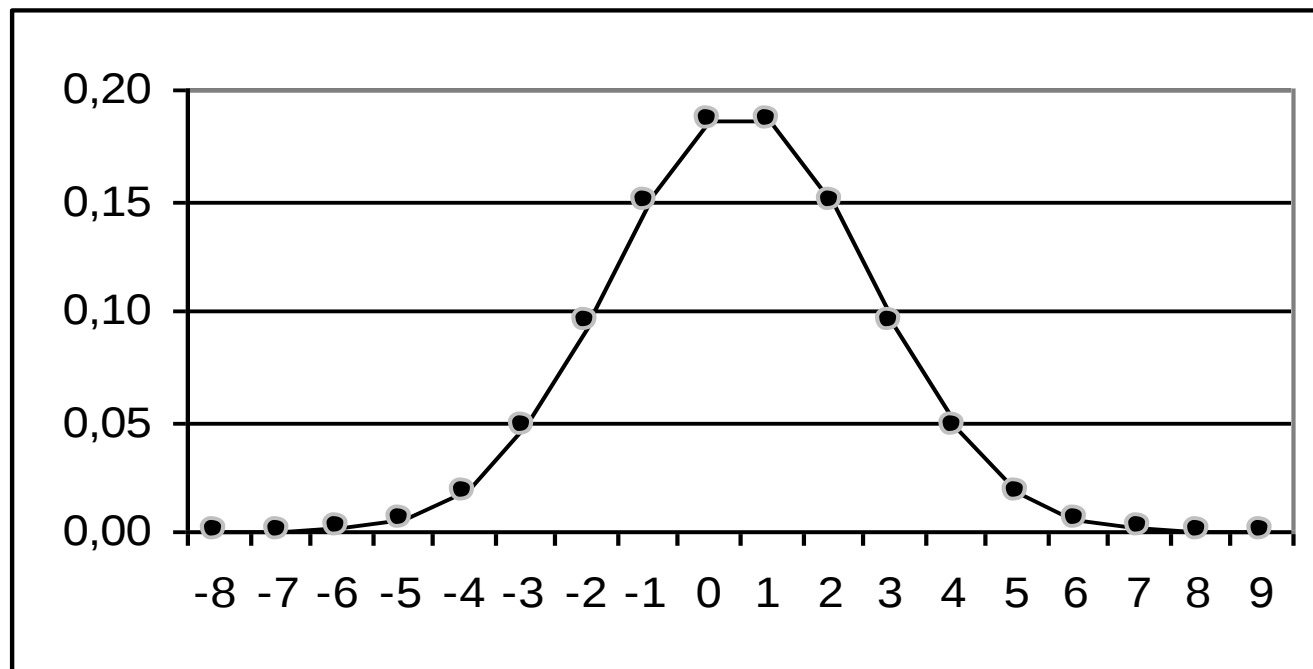
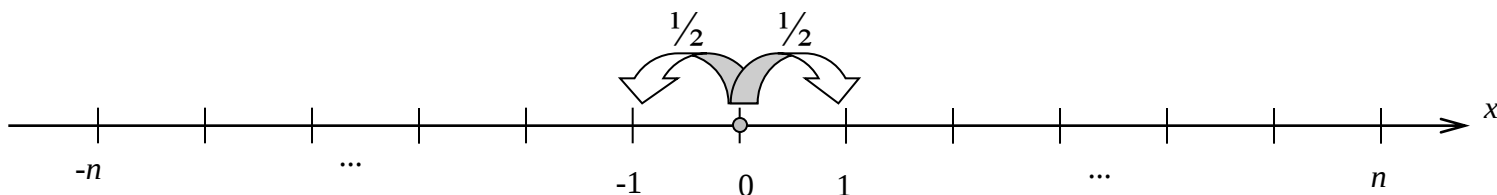
*) Laiks un telpa – diskrētie

Gadījuma klejošana taisnē



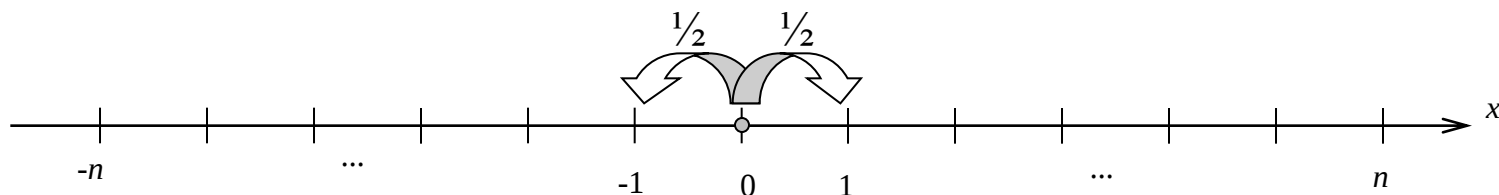
Gadījuma klejošanas piemērs

Gadījuma klejošana taisnē



Varbūtība atrasties noteiktajā pozīcijā

Gadījuma klejošana taisnē



$T \backslash i$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0						1					
1					$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$				
2				$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$			
3			$\frac{1}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{1}{8}$		
4		$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{16}$	
5	$\frac{1}{32}$		$\frac{5}{32}$		$\frac{5}{16}$		$\frac{5}{16}$		$\frac{5}{32}$		$\frac{1}{32}$

Varbūtība atrasties pozīcijā i pēc T soļiem, veicot gadījuma klejošanu uz taisnes (ja sākam pozīcijā 0).

Kvantu klejošana



Eiropas Sociālā fonda projekts

“Datorzinātnes pielietojumi un tās saiknes ar kvantu fiziku”

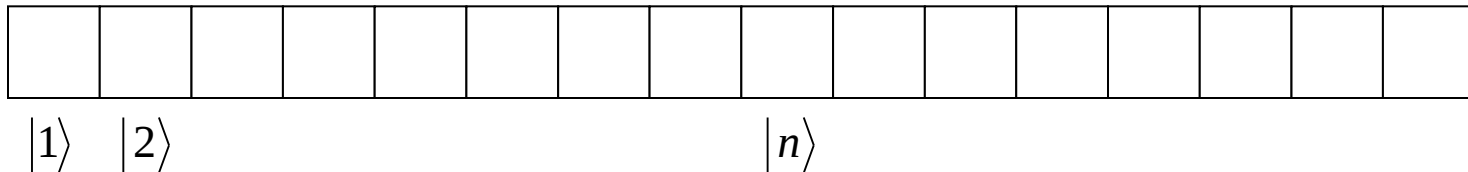
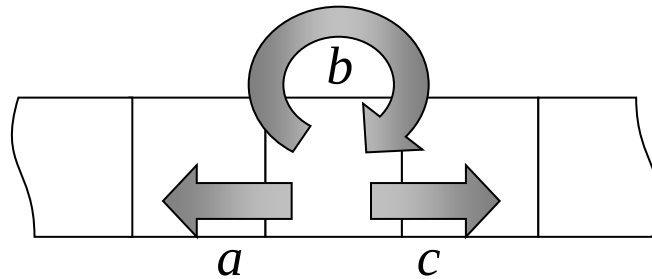
Nr.2009/0216/1DP/1.1.1.2.0/09/APIA/VIAA/044

Vēsture

- Y. Aharonov, L. Davidovich and N. Zagury
“Quantum random walks”
Phys. Rev. A, 48(2):1687–1690, 1993
- D.Aharonov, A.Ambainis, J.Kempe, U.Vazirani.
“Quantum walks on graphs”. ACM, 2001.
arXiv:qunat-ph/0012090
- J.Kempe. **“Quantum walks on graphs”**. 2003.
“Quantum random walks - an introductory overview”

Definējam kvantu klejošanu vienā dimensijā

$$|n\rangle \rightarrow a|n-1\rangle + b|n\rangle + c|n+1\rangle$$

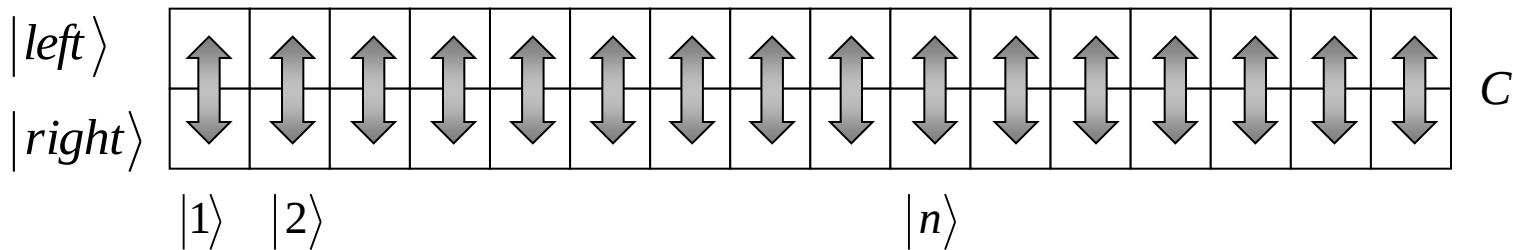


$$\left[\begin{array}{l} |a| = 1, \quad b = c = 0; \\ |b| = 1, \quad a = c = 0; \\ |c| = 1, \quad a = b = 0; \end{array} \right.$$

Tikai triviālas unitāras transformācijas

“Monētas mešanas” transformācija C

$$\begin{aligned} C|n, left\rangle &= a|n, left\rangle + b|n, right\rangle, \\ C|n, right\rangle &= c|n, left\rangle + d|n, right\rangle. \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xleftarrow{\text{unitāra matrica}}$$



Piemēram:

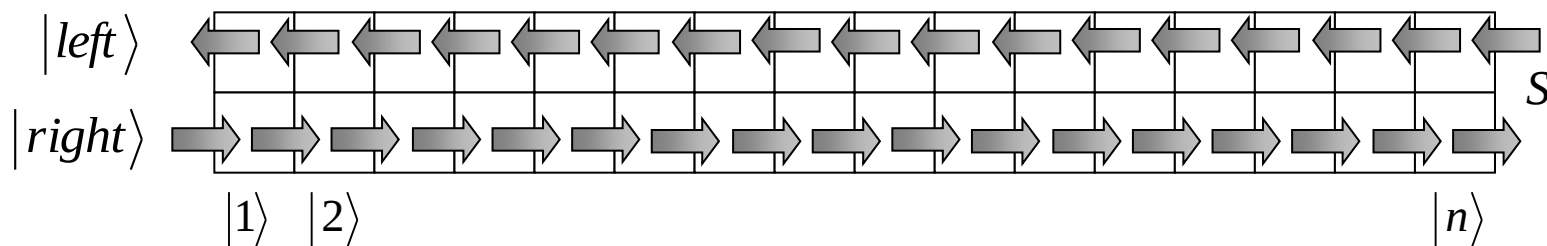
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \xleftarrow{\text{Hadamard transformācija}}$$

Nobīdes transformācija S

unitāra transformācija

$$S|n, \text{left}\rangle = |n+1, \text{left}\rangle$$

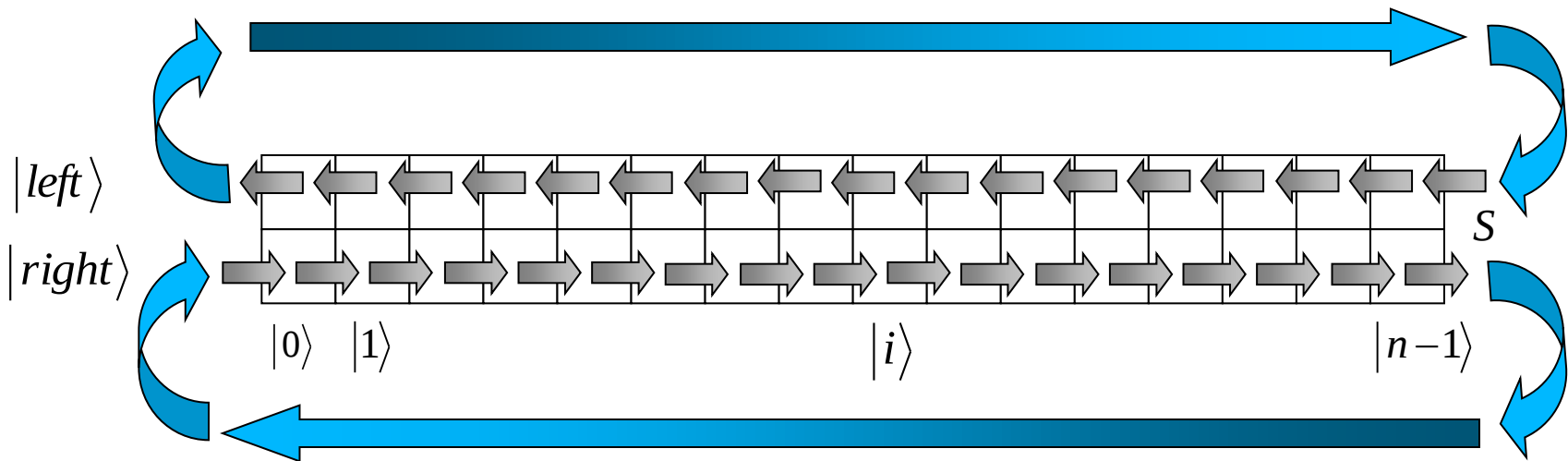
$$S|n, \text{right}\rangle = |n-1, \text{right}\rangle$$



Nobīdes transformācija S

$$\begin{aligned} S|i, left\rangle &= |(i+1) \bmod n, left\rangle \\ S|i, right\rangle &= |(i-1) \bmod n, right\rangle \end{aligned}$$

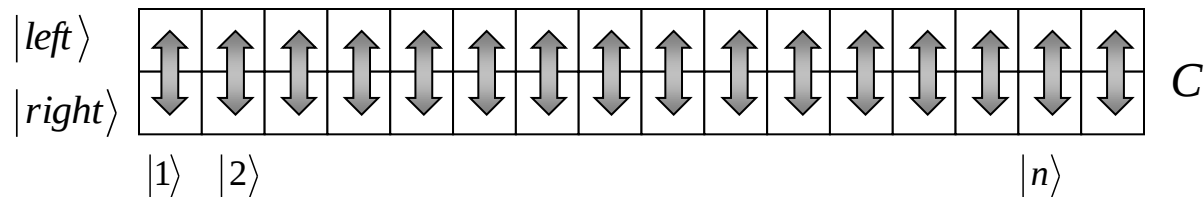
unitāra transformācija



Definējam kvantu klejošanu uz taisnes

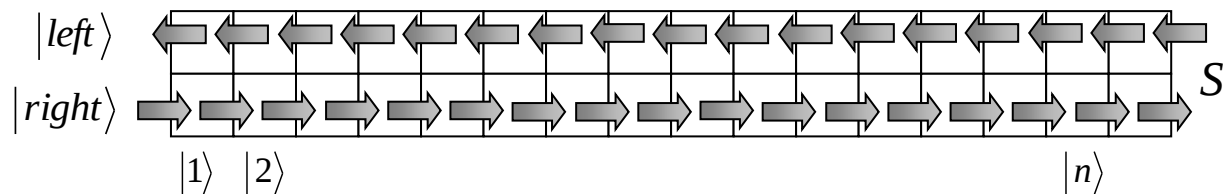
■ “Monētas mešanas” transformācija

$$\begin{aligned} C|n, \text{left}\rangle &= a|n, \text{left}\rangle + b|n, \text{right}\rangle, \\ C|n, \text{right}\rangle &= c|n, \text{left}\rangle + d|n, \text{right}\rangle. \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$



■ Nobīdes transformācija

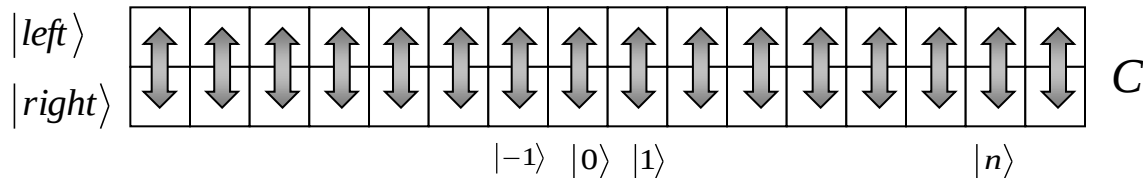
$$\begin{aligned} S|n, \text{left}\rangle &= |n+1, \text{left}\rangle \\ S|n, \text{right}\rangle &= |n-1, \text{right}\rangle \end{aligned}$$



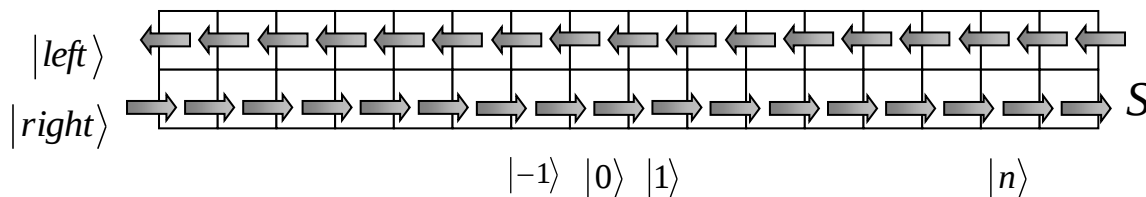
Kvantu klejošana uz taisnes

atkārtot

- “Monētas mešanas” transformācija: $C|n, \text{left}\rangle = a|n, \text{left}\rangle + b|n, \text{right}\rangle$, $C|n, \text{right}\rangle = c|n, \text{left}\rangle + d|n, \text{right}\rangle$. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$



- Nobīdes transformācija: $S|n, \text{left}\rangle = |n+1, \text{left}\rangle$, $S|n, \text{right}\rangle = |n-1, \text{right}\rangle$



Šis sadalījums sāk atšķirties no klasiskā gadījuma jau pie $T = 3$

$T \backslash i$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0						1					
1					$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$				
2				$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$			
3			$\frac{1}{8}$		$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$			
4		$\frac{1}{16}$		$\frac{5}{8}$		$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{16}$		
5	$\frac{1}{32}$		$\frac{17}{32}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{5}{32}$		$\frac{1}{32}$

Varbūtība atrasties pozīcijā i pēc T soļiem, veicot kvantu klejošanu uz taisnes ar sākumstāvokli:

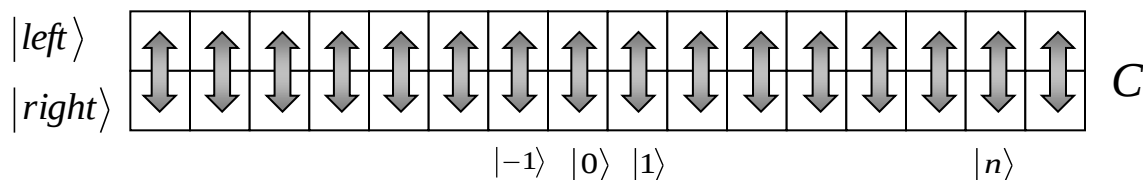
$$|\Psi_{\text{init}}\rangle = |0, \text{left}\rangle$$

Šī kvantu klejošana dod asimetrisku sadalījumu

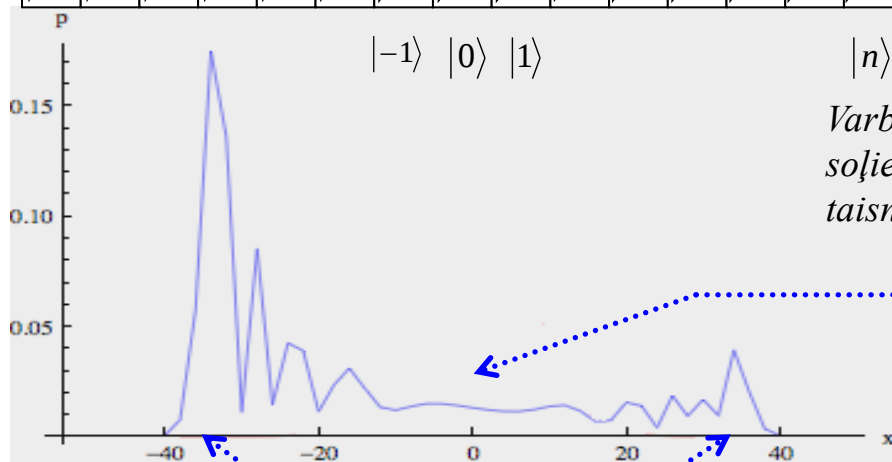
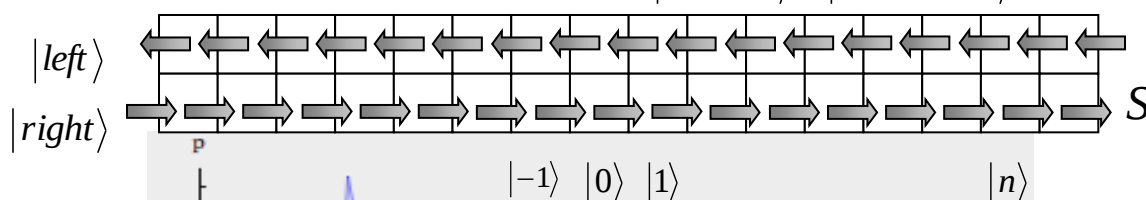
Kvantu klejošana uz taisnes

atkārtot

- “Monētas mešanas” transformācija: $C|n, left\rangle = a|n, left\rangle + b|n, right\rangle$, $C|n, right\rangle = c|n, left\rangle + d|n, right\rangle$. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$



- Nobīdes transformācija: $S|n, left\rangle = |n+1, left\rangle$, $S|n, right\rangle = |n-1, right\rangle$



Varbūtība atrasties pozīcijā i pēc 50 soļiem, veicot kvantu klejošanu uz taisnes ar sākumstāvokli:

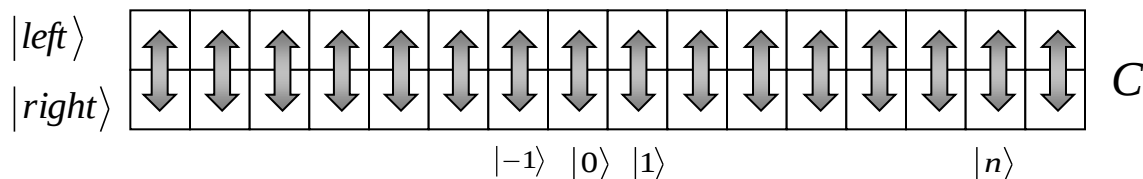
$$|\Psi_{init}\rangle = |0, left\rangle$$

Sadalījums šai kvantu klejošanai ir asimetrisks

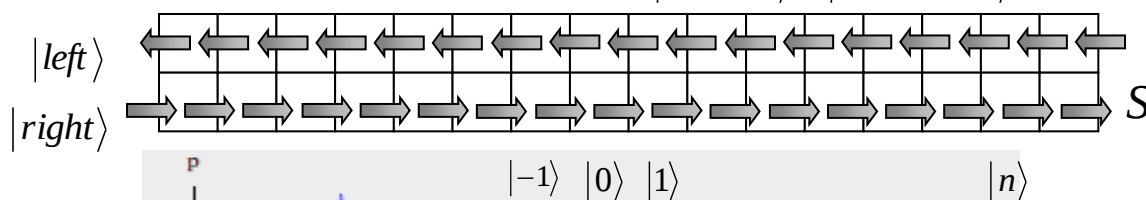
Kvantu klejošana uz taisnes

atkārtot

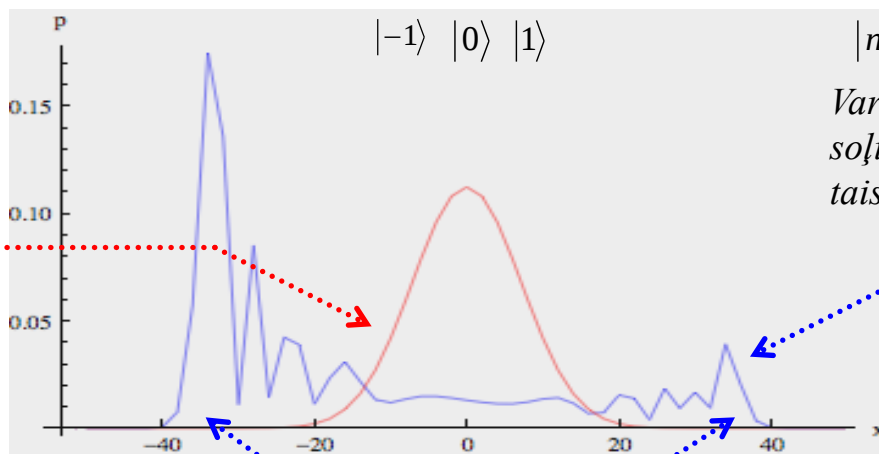
- “Monētas mešanas” transformācija: $C|n, \text{left}\rangle = a|n, \text{left}\rangle + b|n, \text{right}\rangle$, $C|n, \text{right}\rangle = c|n, \text{left}\rangle + d|n, \text{right}\rangle$. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$



- Nobīdes transformācija: $S|n, \text{left}\rangle = |n+1, \text{left}\rangle$
 $S|n, \text{right}\rangle = |n-1, \text{right}\rangle$



Salīdzinājums ar
klasisko gadījuma
klejošanu



Varbūtība atrasties pozīcijā i pēc 50
soļiem, veicot kvantu klejošanu uz
taisnes ar sākumstāvokli:

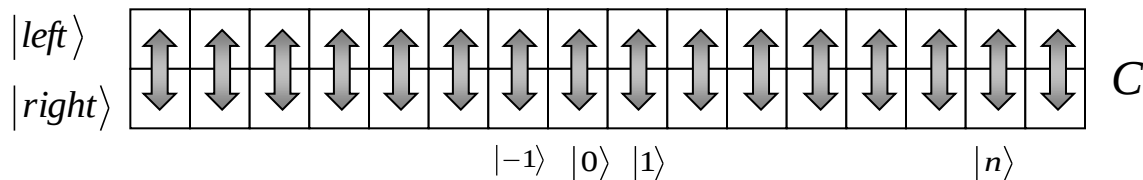
$$|\Psi_{\text{init}}\rangle = |0, \text{left}\rangle$$

Šī kvantu klejošana dod
asimetrisku sadalījumu

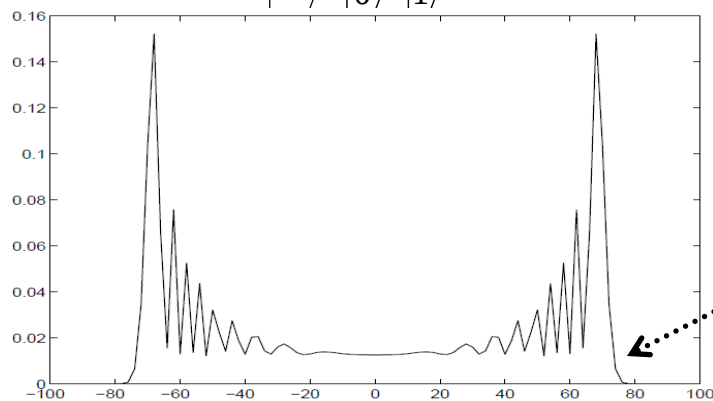
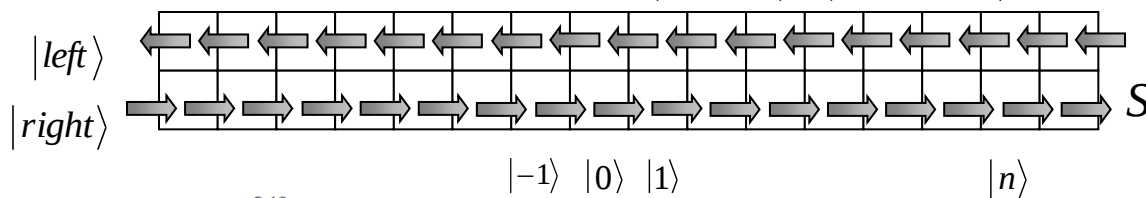
Kvantu klejošana uz taisnes

atkārtot

- “Monētas mešanas” transformācija: $C|n, \text{left}\rangle = a|n, \text{left}\rangle + b|n, \text{right}\rangle$,
 $C|n, \text{right}\rangle = c|n, \text{left}\rangle + d|n, \text{right}\rangle$. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = Y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$



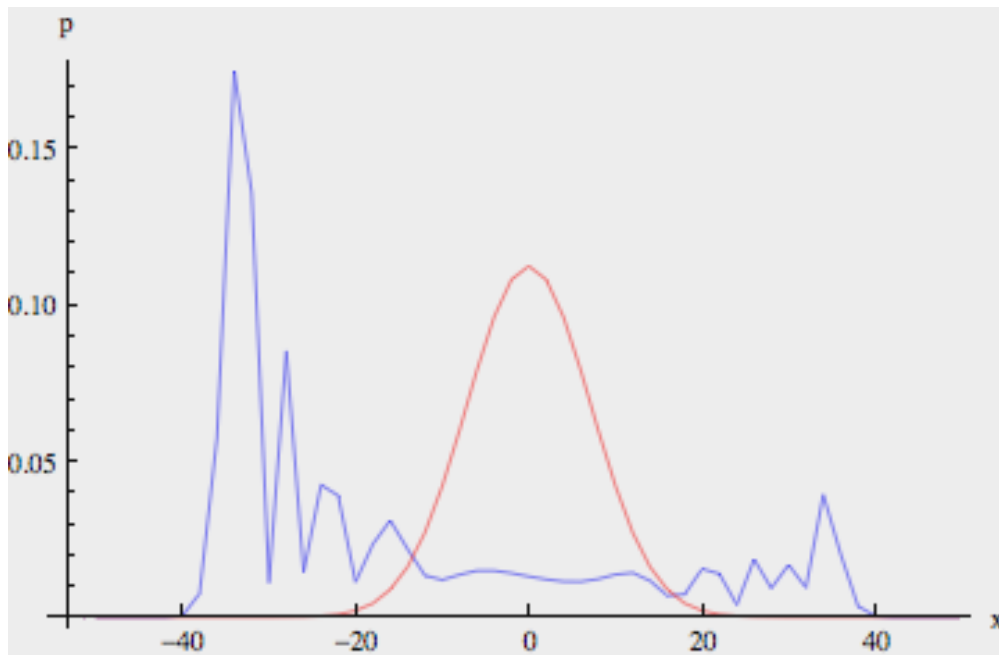
- Nobīdes transformācija: $S|n, \text{left}\rangle = |n+1, \text{left}\rangle$
 $S|n, \text{right}\rangle = |n-1, \text{right}\rangle$



The probability distribution obtained from a computer simulation of the quantum walk with a symmetric “coin flip” transformation (Y).

The number of steps in the walk was taken to be 100. Only the probability at the even points is plotted.

Daži secinājumi

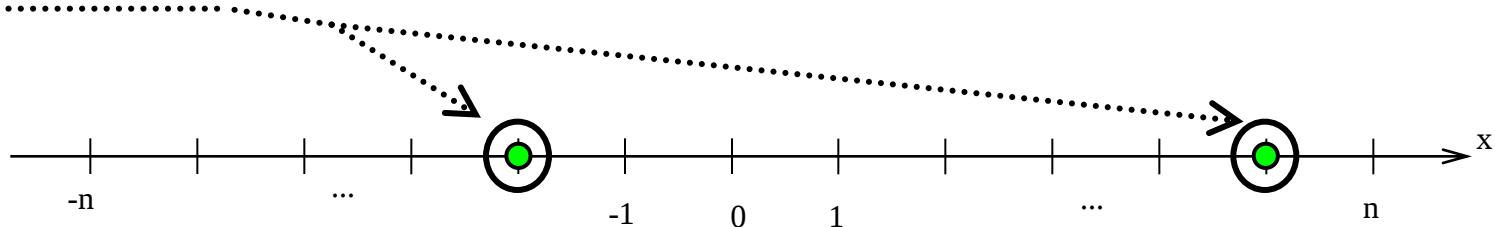


... nu un?

- *Varbūtība atrasties i-ajā pozīcijā pēc 50 kvantu klejošanas soļiem uz taisnes*
- *Varbūtība atrasties i-ajā pozīcijā pēc 50 klasiskās gadījumu klejošanas uz taisnes*

Kvantu klejošana kā meklēšanas algoritms

leviesīsim dažus
izņēmumu punktus



- “Monētas mešanas” transformācija: $C|n, left\rangle = a|n, left\rangle + b|n, right\rangle$,
 $C|n, right\rangle = c|n, left\rangle + d|n, right\rangle$.

visos “neizņēmumu” punktos:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = Y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

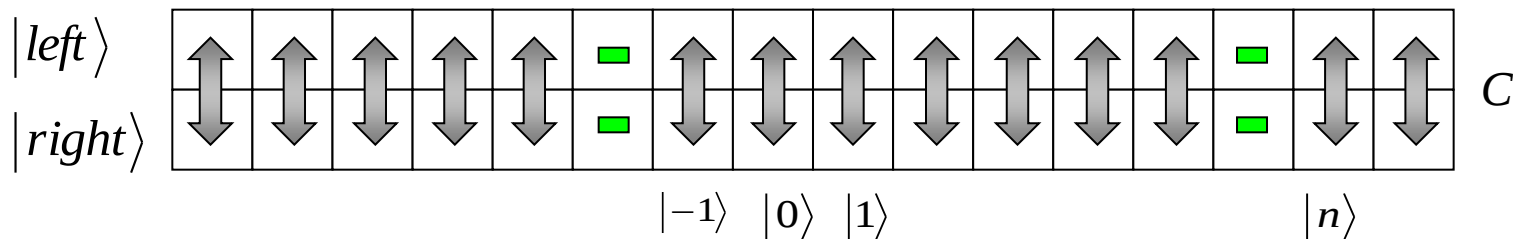
visos “izņēmumu” punktos:

$$\begin{pmatrix} a_m & b_m \\ c_m & d_m \end{pmatrix} = -I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Nobīdes transformācijas: $S|n, left\rangle = |n+1, left\rangle$
 $S|n, right\rangle = |n-1, right\rangle$

atkārtot

Kvantu klejošana kā meklēšanas algoritms



- “Monētas mešanas” transformācija: $C|n, left\rangle = a|n, left\rangle + b|n, right\rangle$,
 $C|n, right\rangle = c|n, left\rangle + d|n, right\rangle$.

visos “neizņēmuma” punktos:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = Y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

visos “izņēmumu” punktos:

$$\begin{pmatrix} a_m & b_m \\ c_m & d_m \end{pmatrix} = -I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Nobīdes transformācija: $S|n, left\rangle = |n+1, left\rangle$
 $S|n, right\rangle = |n-1, right\rangle$

atkārtot

Pārejam no taisnes uz plakni



EIROPAS SAVIENĪBA IEGULDĪJUMS TAVĀ NĀKOTNĒ



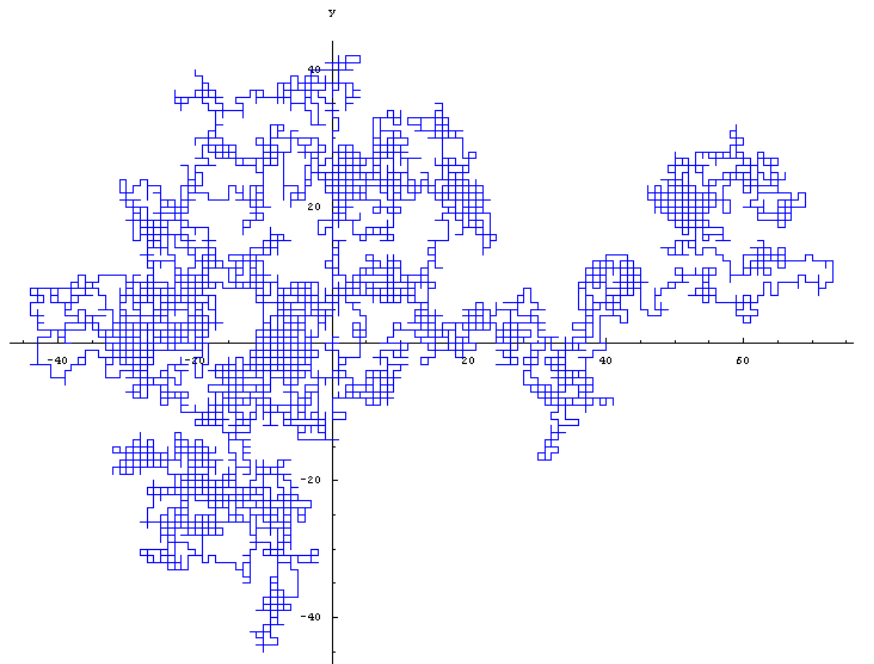
Eiropas Sociālā fonda projekts

“Datorzinātnes pielietojumi un tās saiknes ar kvantu fiziku”

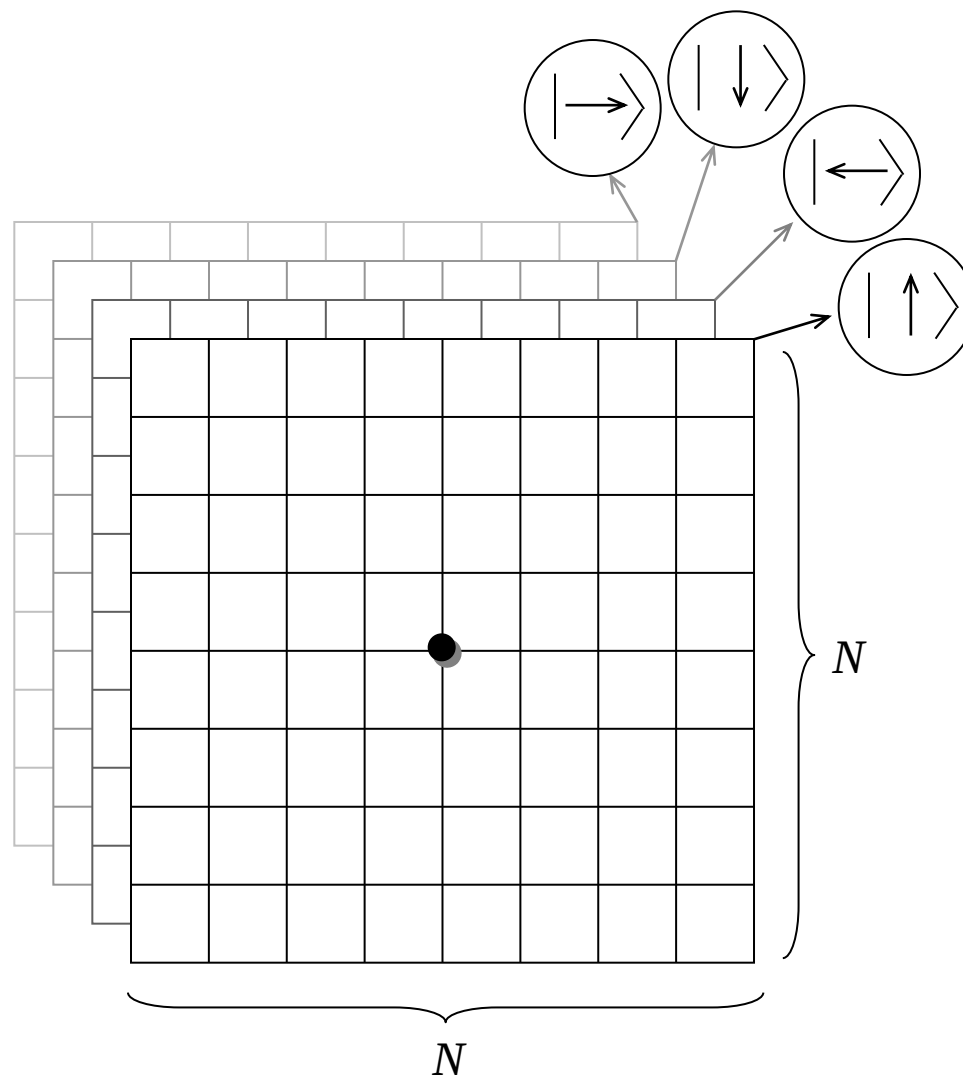
Nr.2009/0216/1DP/1.1.1.2.0/09/APIA/VIAA/044

Gadījumu klejošana plaknē

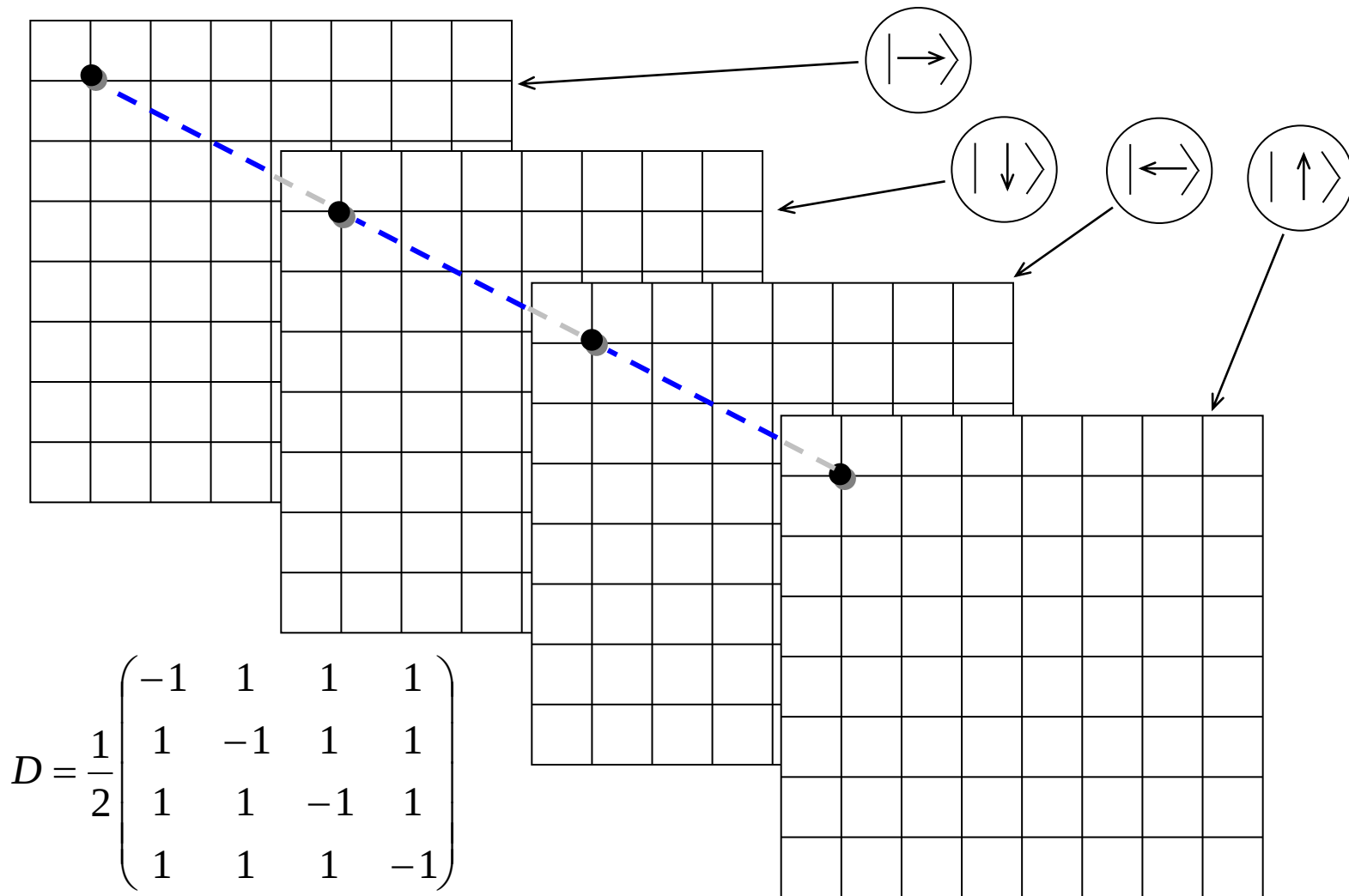
- Klasiskā gadījumu klejošana plaknē
 - Sākas pozīcijā $(0; 0)$
 - Ar varbūtību $1/4$ seko vienam no četriem virzieniem



Definējam kvantu klejošanu plaknē

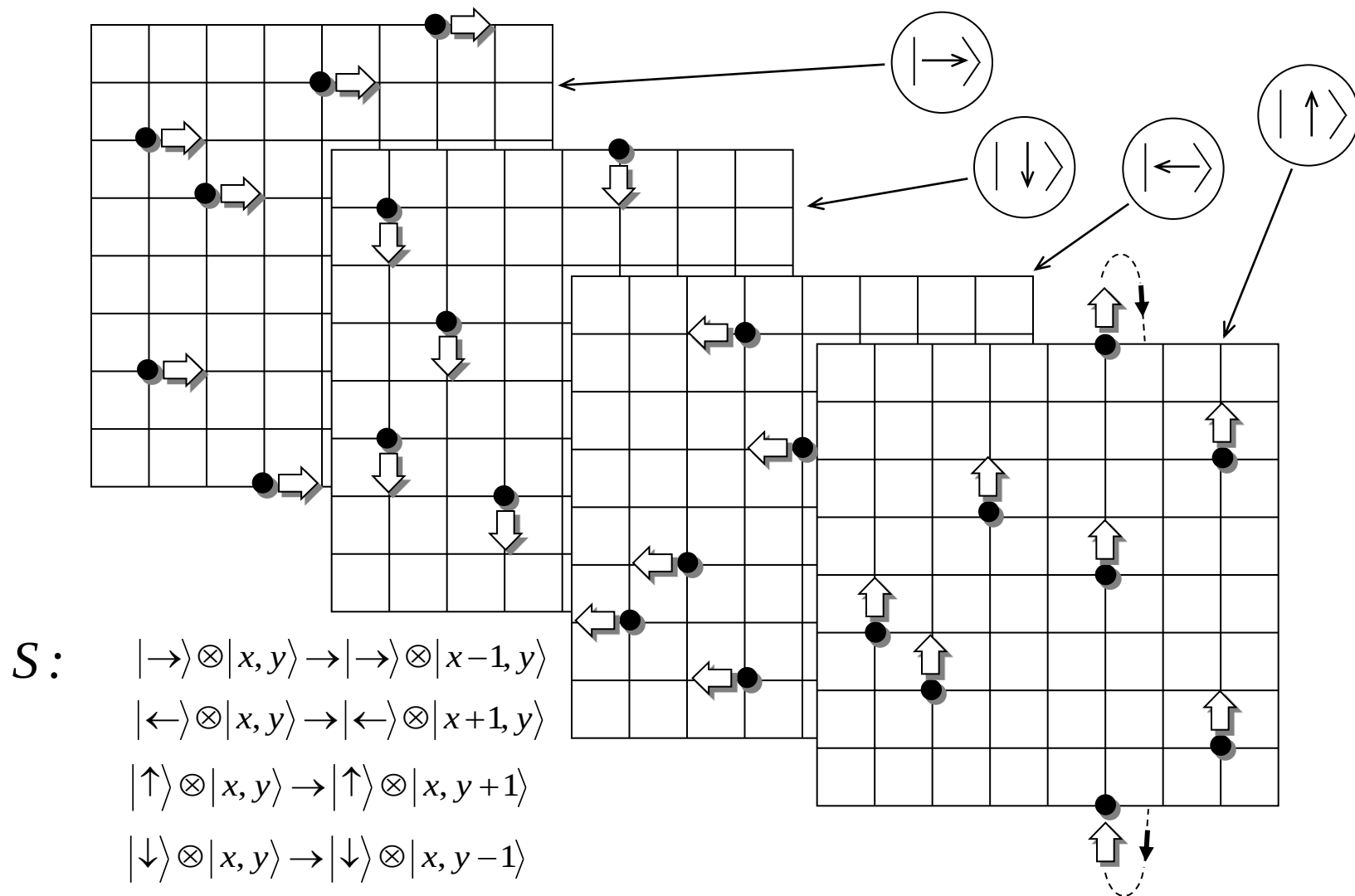


Kvantu klejošana 2D: “monētas mešanas” transformācija



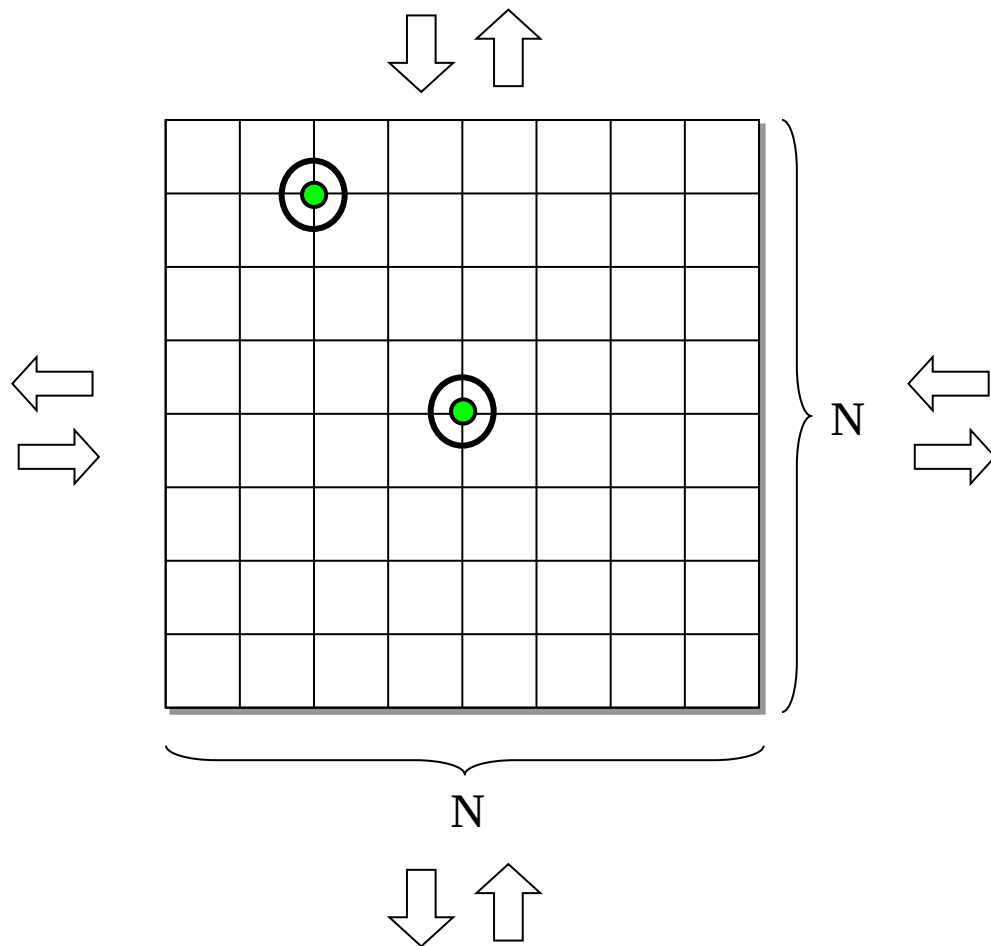
“monētas mešanas” transformācija

Kvantu klejošana 2D: nobīdes transformācija



Nobīdes transformācija

Kvantu meklēšana plaknē



Kvantu meklēšana plaknē

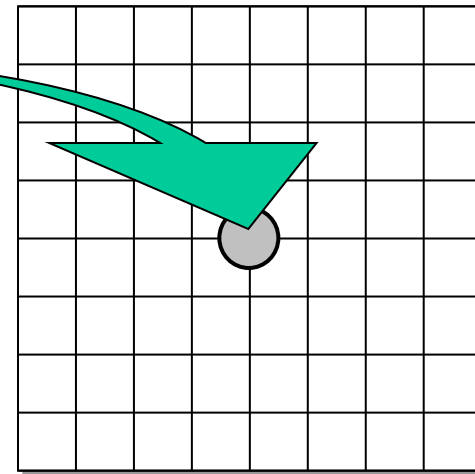
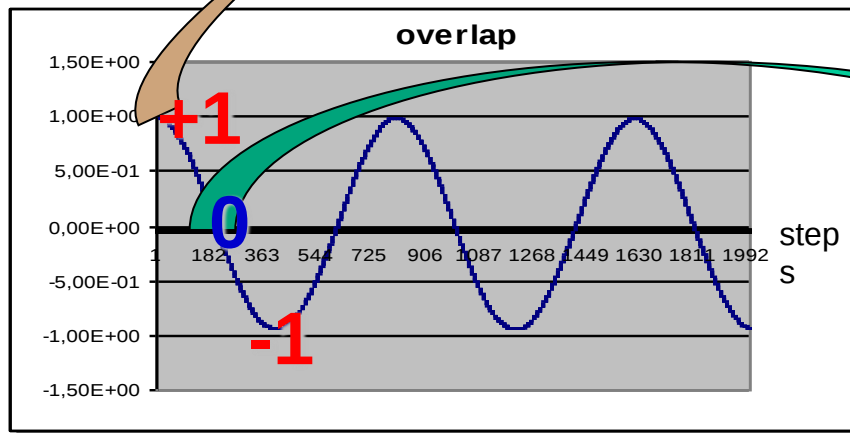
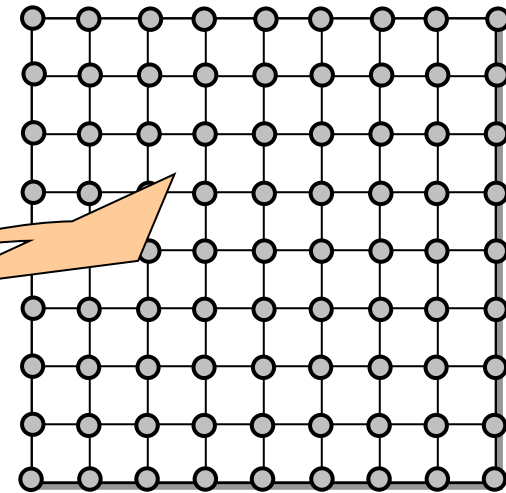
“Monētas” mešanas” transformācija	Pielietot <i>difūzijas</i> transformāciju neatzīmētām pozīcijām	Pielietot <i>identitātes</i> transformāciju atzīmētajām pozīcijām	Atkārtot $O(N)$ times
	$D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$-I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	
Visās pozīcijās pielietot nobīdes transformāciju			
$S_{ff}:$ $ \rightarrow\rangle \otimes x, y\rangle \rightarrow \leftarrow\rangle \otimes x+1, y\rangle$ $ \leftarrow\rangle \otimes x, y\rangle \rightarrow \rightarrow\rangle \otimes x-1, y\rangle$ $ \uparrow\rangle \otimes x, y\rangle \rightarrow \downarrow\rangle \otimes x, y-1\rangle$ $ \downarrow\rangle \otimes x, y\rangle \rightarrow \uparrow\rangle \otimes x, y+1\rangle$			

Skalārais reizinājums

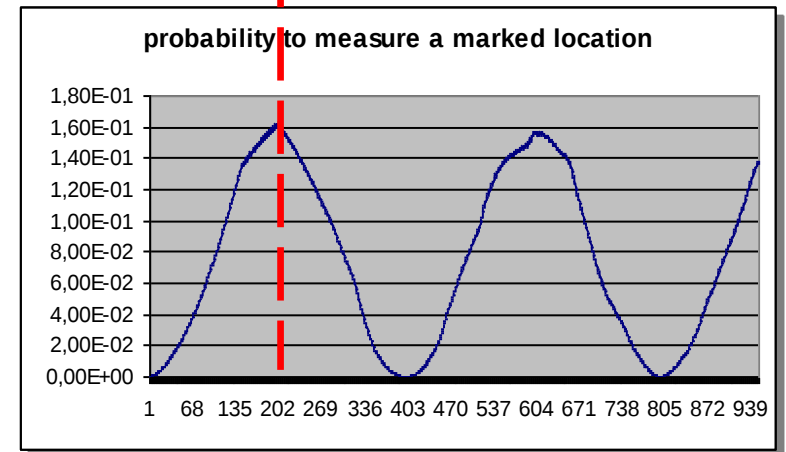
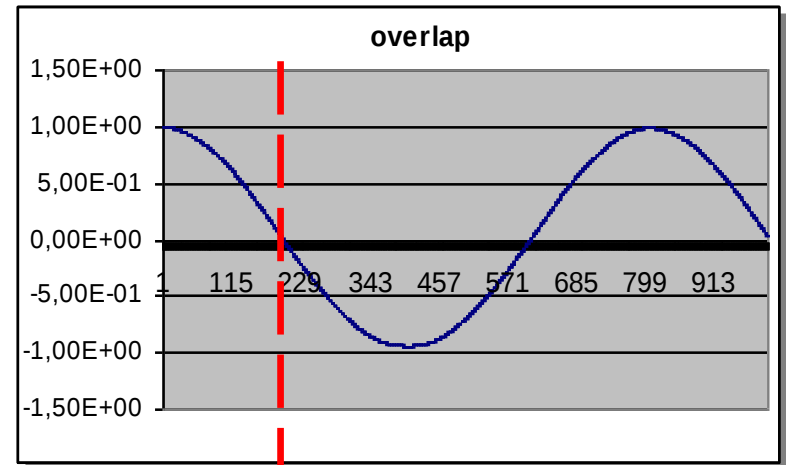
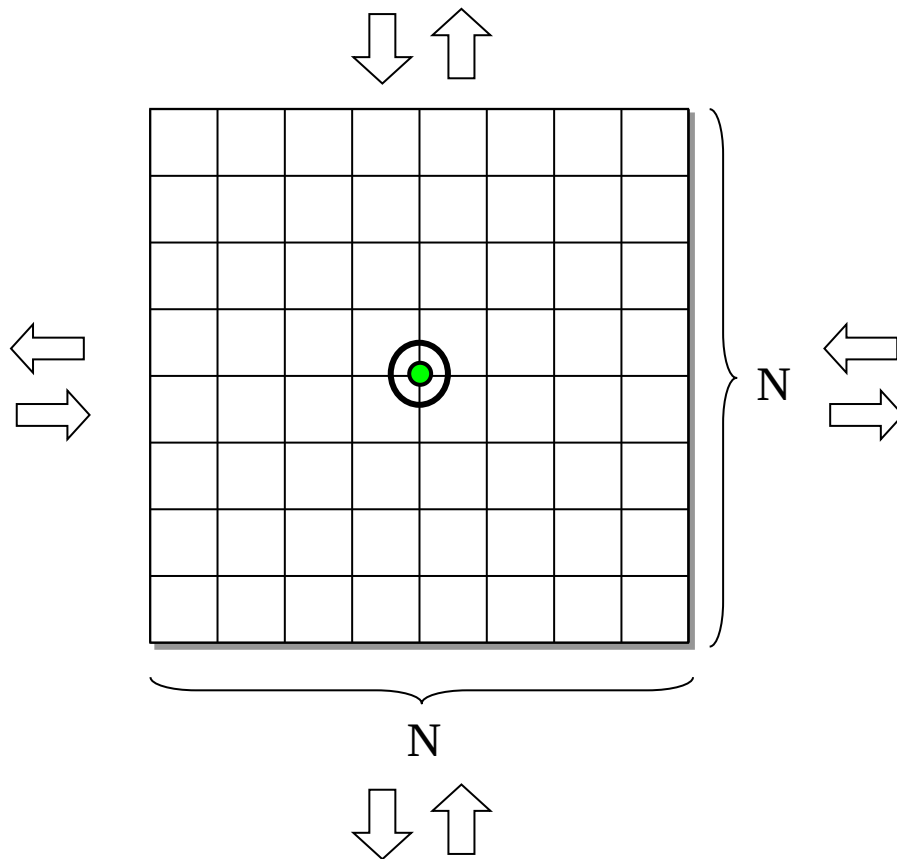
$(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – sākumstāvoklis

$(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n)$ – tekošais stāvoklis

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=0}^n \alpha_i \beta_i$$



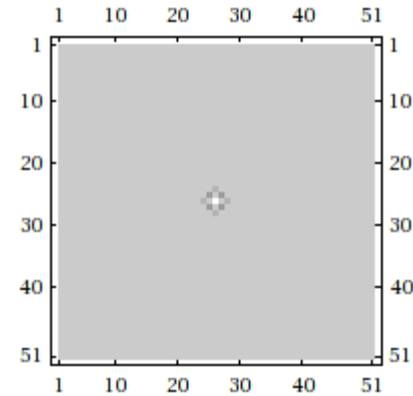
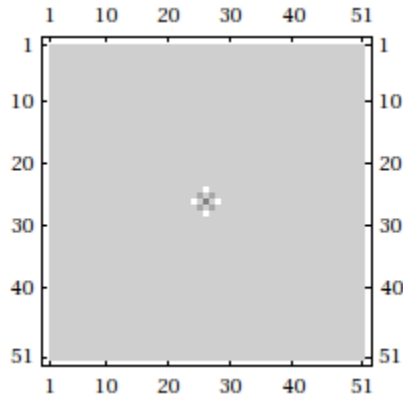
Kvantu klejošana uz plaknes: viens atrisinājums



Grid size: 101 x 101.

Number of steps: 1000.

Process ir jūtīgs pret transformāciju izvēli



Dažādas “Nobīdes” transformācijas

$$S_{move}: |\rightarrow\rangle \otimes |x, y\rangle \rightarrow |\rightarrow\rangle \otimes |x+1, y\rangle$$

$$|\leftarrow\rangle \otimes |x, y\rangle \rightarrow |\leftarrow\rangle \otimes |x-1, y\rangle$$



$$|\uparrow\rangle \otimes |x, y\rangle \rightarrow |\uparrow\rangle \otimes |x, y+1\rangle$$

$$|\downarrow\rangle \otimes |x, y\rangle \rightarrow |\downarrow\rangle \otimes |x, y-1\rangle$$

$$S_{flipflop}: |\rightarrow\rangle \otimes |x, y\rangle \rightarrow |\leftarrow\rangle \otimes |x+1, y\rangle$$

$$|\leftarrow\rangle \otimes |x, y\rangle \rightarrow |\rightarrow\rangle \otimes |x-1, y\rangle$$



$$|\uparrow\rangle \otimes |x, y\rangle \rightarrow |\downarrow\rangle \otimes |x, y-1\rangle$$

$$|\downarrow\rangle \otimes |x, y\rangle \rightarrow |\uparrow\rangle \otimes |x, y+1\rangle$$

Kādu uzlabojumu mēs piedāvājam?

- Oriģinālajam algoritmam kvantu meklēšanai plaknē bija nepieciešama amplitūdas amplifikācija, lai atrisinājumu atrast ar lielu varbūtību.
- Mēs atklājām, ka ar lielu varbūtību tiks nomērīts stāvoklis, kas atrodas ne vairāk kā $\sqrt{N}$ attālumā no atrisinājuma, tādēļ var iztikt bez amplitūdas amplifikācijas.
- Mēs parādījām to ar skaitliskiem eksperimentiem.
- Mēs to pierādījām! (arXiv: 1112.3337, iesniegts TQC 2012)

From the definitions of $|\Phi_{k,l}^{\pm}\rangle$ and $|v_{k,l}^{\pm}\rangle$,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|v_{k,l}^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|v_{k,l}^{-}\rangle = \frac{i}{4\sin\theta_{k,l}} \begin{bmatrix} 2\cos\theta_{k,l} - 2w^k \\ 2\cos\theta_{k,l} - 2w^{-k} \\ 2\cos\theta_{k,l} - 2w^l \\ 2\cos\theta_{k,l} - 2w^{-l} \end{bmatrix}$$

Therefore, the amplitude of $|\uparrow\rangle$ in this state is $\frac{i}{2\sin\theta_{k,l}}(\cos\theta_{k,l} - w^{-k})$. The amplitude of $|j\rangle$ in $|\xi_k\rangle$ is $\frac{1}{\sqrt{N}}w^{kj}$. The amplitude of $|j'\rangle$ in $|\xi_l\rangle$ is $\frac{1}{\sqrt{N}}w^{lj'}$. Therefore, the amplitude of $|j, j', \uparrow\rangle$ in $\frac{1}{\sqrt{2}}|\Phi_{k,l}^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\Phi_{k,l}^{-}\rangle$ is

$$\frac{1}{\sqrt{N}}w^{kj+lj'} \frac{i}{2\sin\theta_{k,l}}(\cos\theta_{k,l} - w^{-k})$$

and the amplitude of $|j, j', \uparrow\rangle$ in (8) is

$$\frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{(k,l) \neq (0,0)} i \cot \frac{\theta_l}{2} \cdot \frac{i}{2\sin\theta_{k,l}}(\cos\theta_{k,l} - w^{-k})w^{kj+lj'}.$$

By using $\sin\theta_{k,l} = 2\sin\frac{\theta_{k,l}}{2}\cos\frac{\theta_{k,l}}{2}$, we get that the amplitude of $|j, j', \uparrow\rangle$ is

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{(k,l) \neq (0,0)} \frac{1}{4N} \left(-\frac{\cos\theta_{k,l}}{\sin^2\frac{\theta_{k,l}}{2}} w^{kj+lj'} + \frac{1}{\sin^2\frac{\theta_{k,l}}{2}} w^{k(j-1)+lj'} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{(k,l) \neq (0,0)} \frac{1}{4N} \left(2w^{kj+lj'} - \frac{1}{\sin^2\frac{\theta_{k,l}}{2}} (w^{kj+lj'} - w^{k(j-1)+lj'}) \right), \quad (9) \end{aligned}$$

with the equality following from $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$.

We can decompose the sum into two sums, one over all the first components, one over all the second components. The first component of the sum in (9) is close to 0 and, therefore, can be omitted. Hence, we get that the amplitude of $|j, j', \uparrow\rangle$ in the unnormalized state $|\psi'_{f_{\text{total}}}\rangle$ can be approximated by

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{(k,l) \neq (0,0)} \frac{1}{4N} \frac{1}{\sin^2\frac{\theta_{k,l}}{2}} (-w^{kj+lj'} + w^{k(j-1)+lj'}) = \Theta\left(\frac{1}{N}\right) \cdot (f(j-1, j') - f(j, j')).$$

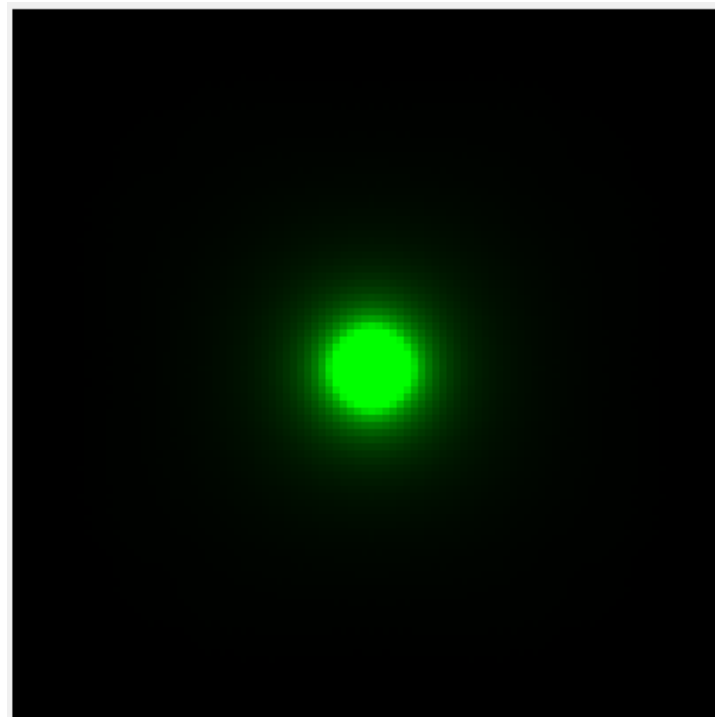
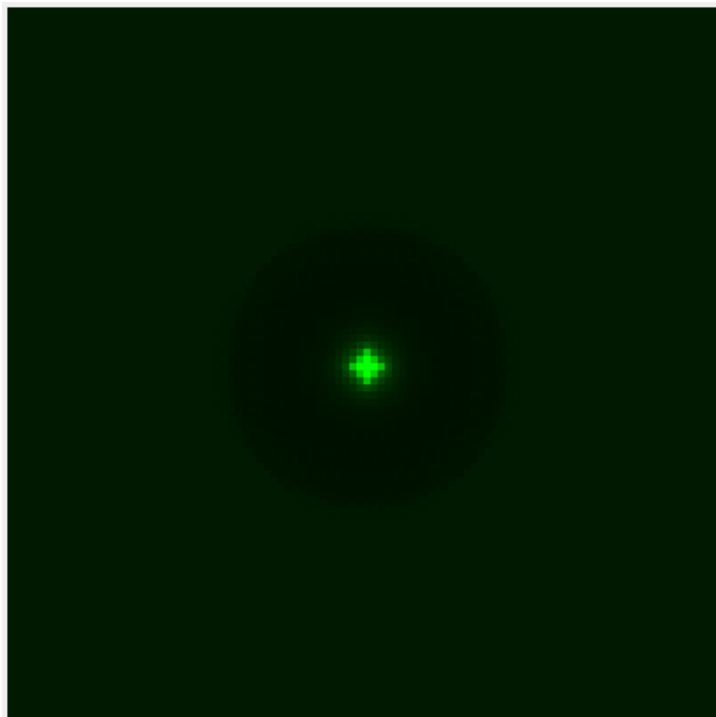
To obtain the amplitude of $|j, j', \uparrow\rangle$ in $|\psi_{f_{\text{total}}}\rangle$, this should be divided by $\|\psi'_{f_{\text{total}}}\|$ which is of the order $\Theta(\sqrt{\log N})$. This implies Lemma 1. $\blacksquare$

Priekšstatu evolūcija

- “Kvantiski” meklēt atrisinājumu plaknē ir tik pat lēni kā klasiski
- Nomainot transformāciju, var atrast laikā $O(\sqrt{N \log N})$ ar varbūtību $O(1/\log N)$.
- Pielietojot amplitūdas amplifikāciju var atrast atrisinājumu laikā $O(\sqrt{N \log N})$
- Var iztikt bez amplitūdas amplifikācijas, t.i. atrast atrisinājumu laikā $O(\sqrt{N})$

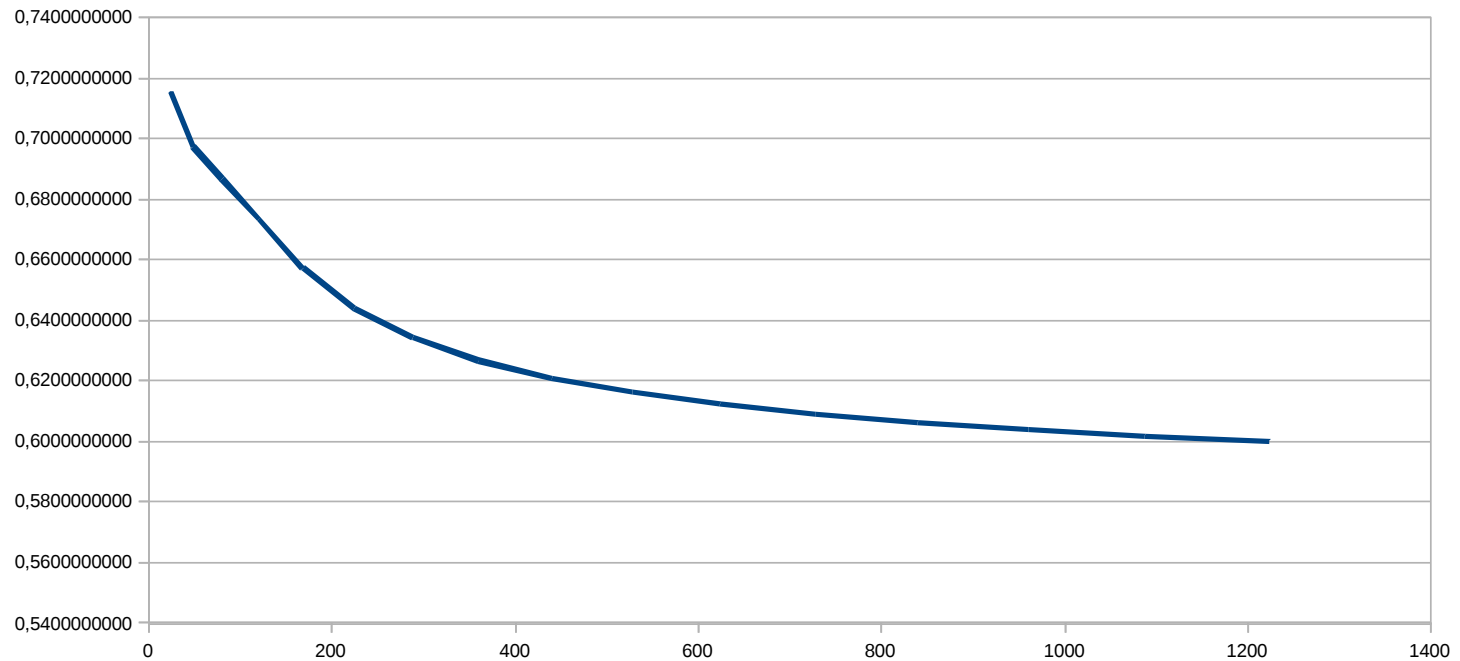
Kvantu klejošana kā meklēšanas algoritms

- Stāvoklis klejošanas sākumā un “beigās”



Atrisinājuma apkārtne

- Varbūtība nomērīt stāvoki $\sqrt{N}$ attālumā no atrisinājuma

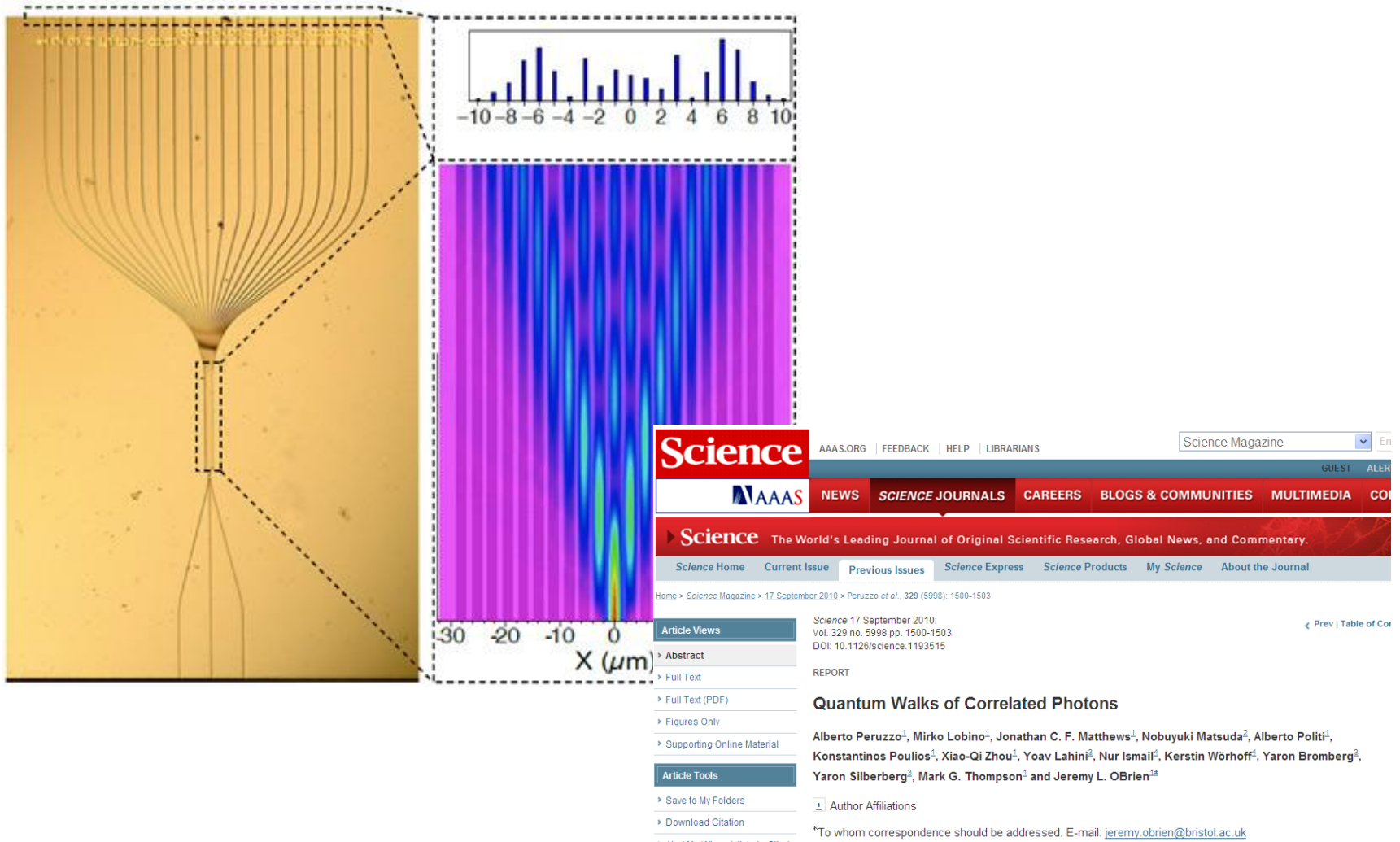


Paldies par uzmanību!

Jautājumi?

Kāpēc tas ir interesanti?

Motivācija 1: ziņas no fizikā kaujas lauka



Motivācija 2: kvantu klejošanai atradās pielietojumi!

- $O(N^{2/3})$ quantum algorithm for element distinctness problem

Ambainis, A.: Quantum walk algorithm for element distinctness.
SIAM J. Comput. 37(1), 210–239 (2007)

- An $O(N^{1.3})$ quantum algorithm for the triangle problem

Magniez, F., Santha, M., Szegedy, M.: An $O(n^{1.3})$ quantum algorithm for the triangle problem. In: Proceedings of SODA 2005, pp. 1109–1117 (2005), SIAM J. Comput. 37(2), 413–424 (2007)

- Matrix multiplication test – $O(N^{5/3})$

Buhrman, H., Špalek, R.: Quantum Verification of Matrix Products. In: SODA 2006. Proceedings of 17th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, Miami, Florida, pp. 880–889 (2006)

- NAND formula evaluation

A. Ambainis, A. Childs, B. Reichardt, R. Špalek, S. Zhang, "Any AND-OR Formula of Size N can be Evaluated in time $n^{1/2+o(1)}$ on a Quantum Computer", Proceedings of FOCS'2007, pp. 363-372 (2007).

Paldies par uzmanību!



IEGULDĪJUMS TAVĀ NĀKOTNĒ



Eiropas Sociālā fonda projekts

“Datorzinātnes pielietojumi un tās saiknes ar kvantu fiziku”

Nr.2009/0216/1DP/1.1.1.2.0/09/APIA/VIAA/044