



IEGULDĪJUMS TAVĀ NĀKOTNĒ

# Kvantu operāciju dinamika

Marats Golovkins

LU un LMT Datorzinātņu dienas

„Ratnieki”, Līgatnes novads, 2012.gada 6.-8. augusts

“Computer science applications and its relations to quantum physics”, project of the European Social Fund Nr. 2009/0216/1DP/1.1.1.2.0/09/APIA/VIAA/044

# Markova ķēdes

Markova ķēde ir varbūtisks process galīgu stāvokļu kopā.

Piemēram, 2x2 laukums, kur kauliņš katrā rūtiņā var atrasties ar noteiktu varbūtību.

|            |           |
|------------|-----------|
| I<br>1/2   | II<br>1/3 |
| III<br>1/6 | IV<br>0   |

Kauliņš laukuma ietvaros var pārvietoties uz augšu/leju, pa labi/pa kreisi ar vienu un to pašu varbūtību 1/2.

# Markova ķēdes

|            |           |
|------------|-----------|
| I<br>1/2   | II<br>1/3 |
| III<br>1/6 | IV<br>0   |

Šāda procesa sākuma stāvokli var  
aprakstīt ar varbūtību sadalījuma vektoru  
(1/2, 1/3, 1/6, 0)

Savukārt pašu procesu nosaka matrica

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

# Markova ķēdes

|            |           |
|------------|-----------|
| I<br>1/2   | II<br>1/3 |
| III<br>1/6 | IV<br>0   |

Jautājot, ar kādu varbūtību kauliņš atradīsies pirmajā laukumā pēc diviem soļiem, atbildi var rast, divas reizes pareizinot sākotnējā varbūtību sadalījuma vektoru ar šo matricu:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

# Markova ķēdes

Stohastiska matrica ir matrica, kas sastāv no nenegatīviem elementiem, tāda, ka katras rindiņas elementu summa ir 1.

Piemēram,

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Katru Markova ķēdi apraksta stohastiska matrica. Un otrādi, katrai stohastiskai matricai atbilst Markova ķēde.

# Markova ķēdes

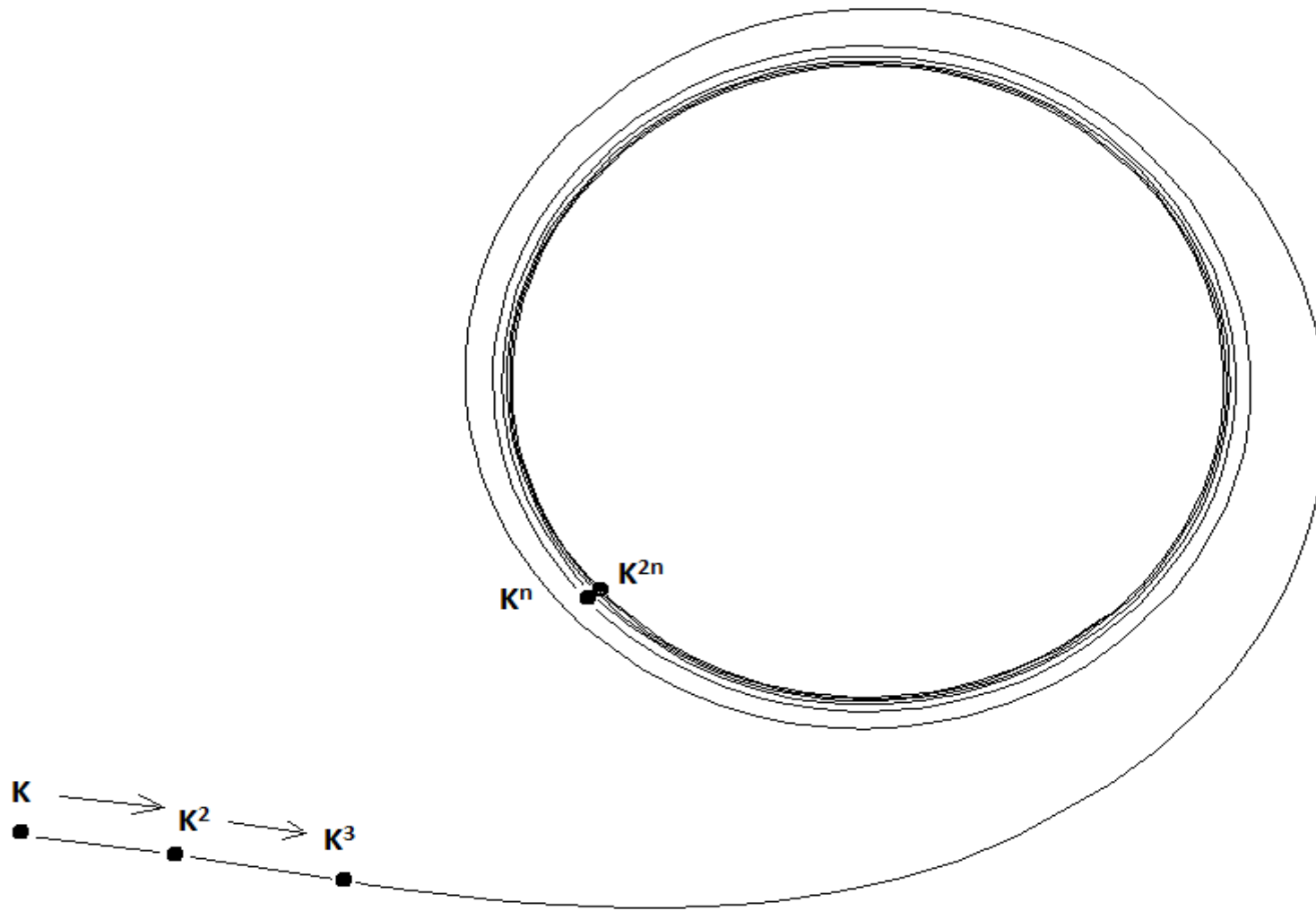
No klasiskās Markova ķēžu teorijas ir zināms, ja Markova ķēdi ar matricu  $K$  izpilda pietiekoši lielu soļu daudzumu, tad

lai arī kāds nebūtu sākotnējais varbūtību sadalījums  $S$ , tas arvien vairāk tuvinās stacionāram sadalījumam, proti, eksistē

$$c > 0, \text{ tāds, ka } \lim_{n \rightarrow \infty} SK^{cn} K^{cn} = \lim_{n \rightarrow \infty} SK^{cn}$$

$$\text{No šejienes } \left( \lim_{n \rightarrow \infty} K^{cn} \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} K^{cn}$$

# Markova ķēdes



Kas notiek kvantu operāciju gadījumā?

# Kvantu informācija

- Klasiskais bits: 0 vai 1
- Kvantu bits:  $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ , kur  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ .
- Klasisko bitu reģistrs (3 biti):  
000 vai 001 vai 010 vai 011 vai 100 vai 101 v 110 vai 111
- Kvantu bitu reģistrs (3 biti):  
 $\alpha_1|000\rangle + \alpha_2|001\rangle + \alpha_3|010\rangle + \alpha_4|011\rangle + \alpha_5|100\rangle + \alpha_6|101\rangle +$   
 $+ \alpha_7|110\rangle + \alpha_8|111\rangle$ , kur  
 $|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 + |\alpha_4|^2 + |\alpha_5|^2 + |\alpha_6|^2 + |\alpha_7|^2 + |\alpha_8|^2 = 1$ .

# Kvantu stāvokļi

- Kvantu bitu reģistrs  $\alpha_1|000\rangle + \alpha_2|001\rangle + \dots + \alpha_8|111\rangle$
- Atbilst vektors  $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_8 \end{pmatrix}$
- Kompleksi saistītais vektors:  $\langle\psi| = (\alpha_1^* \quad \alpha_2^* \quad \dots \quad \alpha_8^*)$
- Vektoru vietā bieži izmanto arī blīvuma matricu:

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_8 \end{pmatrix} (\alpha_1^* \quad \alpha_2^* \quad \dots \quad \alpha_8^*) = \begin{pmatrix} |\alpha_1|^2 & \alpha_1\alpha_2^* & \dots & \alpha_1\alpha_8^* \\ \alpha_2\alpha_1^* & |\alpha_2|^2 & \dots & \alpha_2\alpha_8^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_8\alpha_1^* & \alpha_8\alpha_2^* & \dots & |\alpha_8|^2 \end{pmatrix}$$

# Kvantu stāvokļi, turp.

- ar varbūtību  $p_1$  :  $|\psi_1\rangle = \alpha_{11}|000\rangle + \alpha_{21}|001\rangle + \dots + \alpha_{81}|111\rangle$
- ar varbūtību  $p_2$  :  $|\psi_2\rangle = \alpha_{12}|000\rangle + \alpha_{22}|001\rangle + \dots + \alpha_{82}|111\rangle$
- ...
- ar varbūtību  $p_k$  :  $|\psi_k\rangle = \alpha_{1k}|000\rangle + \alpha_{2k}|001\rangle + \dots + \alpha_{8k}|111\rangle$ ,

kur  $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$ .

- Blīvuma matrica:

$$\rho = p_1 |\psi_1\rangle\langle\psi_1| + p_2 |\psi_2\rangle\langle\psi_2| + \dots + p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$$

- $n$  bitu gadījumā –  $2^n \times 2^n$  matrica

# Kvantu operācijas.

$$\rho = p_1|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + p_2|\psi_2\rangle\langle\psi_2| + \dots + p_k|\psi_k\rangle\langle\psi_k|$$

- Jebkuru kvantu stāvokli var aprakstīt ar atbilstošu blīvuma matricu.
- Blīvuma matricas i-tais diagonāles elements nosaka varbūtību, ka kvantu stāvoklis pēc mērījuma nonāk i-tajā determinētajā stāvoklī, tāpēc visu blīvuma matricas diagonāles elementu summa ir 1.

# Kvantu operācijas

- Kvantu stāvokļus var mainīt izmantojot kvantu operācijas
- $\Phi: \rho \rightarrow \rho'$
- $\rho' = \Phi(\rho) = V_1 \rho V_1^* + V_2 \rho V_2^* + \dots + V_s \rho V_s^*$
- Ja  $\rho$  ir  $n \times n$  blīvuma matrica, tad  $\Phi$  ir lineāra operācija telpā ar dimensiju  $n^2$ , t.i., to var aprakstīt kā matricu  $n^2 \times n^2$ .

# Kvantu operācijas

- $\rho' = \Phi(\rho) = V_1 \rho V_1^* + V_2 \rho V_2^* + \dots + V_s \rho V_s^*$
- Tā kā blīvuma matricas  $\rho$  diagonāles elementu summai ir jābūt 1, kvantu operācija šo īpašību saglabā, tāpēc arī  $\rho'$  diagonāles elementu summa ir 1.
- Matemātiski šo nosacījumu apraksta vienādojums

$$V_1^* V_1 + V_2^* V_2 + \dots + V_s^* V_s = 1$$

- vispārīgā gadījumā citu ierobežojumu matricām  $V_i$  nav

# Kvantu operācijas

Kvantu operāciju  $\Phi$  sauc par unitālu, ja tā neizmaina vienības matricu, t.i.,

$$\Phi(I) = I$$

Visas populārākās kvantu operācijas ir unitālas, piemēram, mērījuma operācija, jebkura unitāra matrica.

# Kvantu operācijas

## Teorēma

Lai arī kāda nebūtu unitāla kvantu operācija  $\Phi$ , eksistē augoša virkne

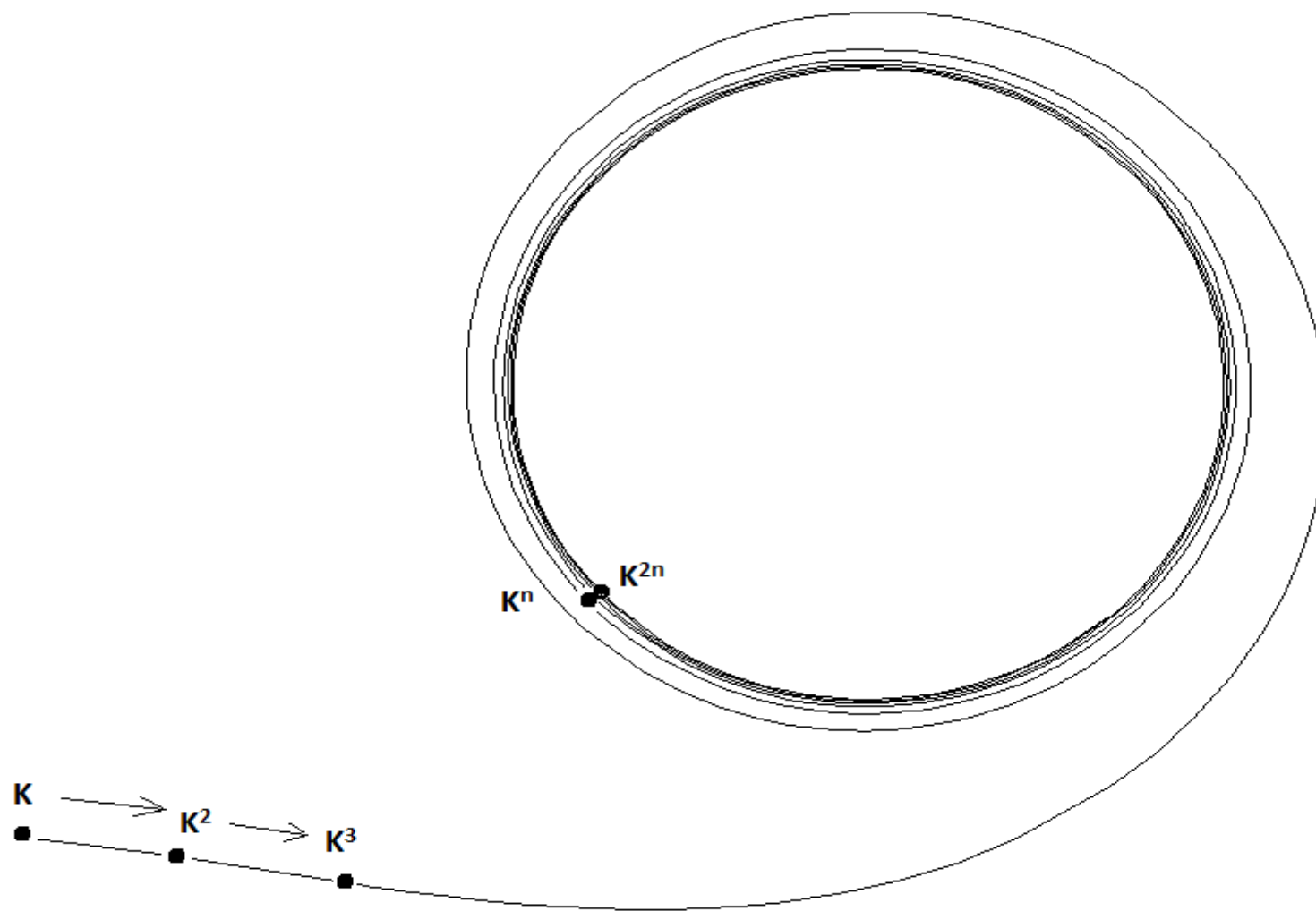
$n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$  tāda ka  $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi^{n_k} = \Psi$ , kur

1)  $\Psi^2 = \Psi$ ;

2) ja eksistē virkne  $m_1, m_2, \dots, m_k$ , tāda ka

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi^{m_k} = \Psi', \text{ tad } \Psi' = \Psi.$$

# Kvantu operācijas



# Kvantu operācijas

Ir zināms, ka šāda operācija  $\Psi$  ir projekcijas matrica telpā  $n^2$ .

Tieši tāpat kā operācijai  $\Psi$ , arī jebkurai mērījuma operācijai  $M$  izpildās  $M^2 = M$ .

Vai  $\Psi$  ir iespējams izteikt kā mērījuma operāciju?

# Kvantu operācijas

Teorēma.

Eksistē kvantu operācija  $\Psi$ , tāda ka  $\Psi^2 = \Psi$ , ko nav iespējams izteikt kā mērījuma operāciju.

$$\Psi : \rho \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Paldies!